

Продуктите *Calculus WIZ* и *Mathematical Explorer*

Запознаване с продуктите *Calculus WIZ* и *Mathematical Explorer*

Компютърните програми *Calculus WIZ* и *Mathematical Explorer* са самостоятелни софтуерни продукти за разработване на математически идеи от различни области на математиката (виж по-долу детайли). Те са търговски продукти, разработени от Wolfram Research, Inc. и се продават от локални разпространители по целия свят. Повече информация за Вашия локален разпространител можете да намерите на <http://store.wolfram.com/>. Има актуални версии на продуктите за Windows и Mac OS.

Инсталация

Продуктите се разпространяват на CD в кутия. Комплектовани са с брошури, съдържащи инструкции за инсталиране. И двата продукта изискват лицензен номер и валидна парола, за да са напълно функциониращи. Номерата са отпечатани на корицата на CD-то. В общия случай, инсталационният процес е много прост и се съпътства със Съветваща програма, която да Ви улеснява.

Продуктът *Calculus WIZ*

Calculus WIZ е инструментално средство, с което може да се решават голяма част от задачите от традиционен курс по математически анализ за 1-ва година студенти. Тези задачи се решават просто с натискане на компютърен клавиш и попълване на информационна форма. *Calculus WIZ* комбинира форми за решаване на задачи (способни да решат повечето задачи от сборниците), обзорен текст на основната теория (напр. теорема за средните стойности, сходимост на степенни редове и др.), както и допълнителна информация, която не се намира в стандартните учебници.

Calculus WIZ е самостоятелен продукт, основан на стабилната технология на *Mathematica*, разработена също от Wolfram Research, Inc. (за изчислителна машина се използва ядрото на *Mathematica* 4). *Calculus WIZ* както повечето продукти на Wolfram използва т.н. Бележник (Notebook) - документ с хипертекст на *Mathematica*, който комбинира текст, графики и формули с лесно използваем интерфейс, напълно интерактивен и позволяващ правенето на анимации. Математическите символи се въвеждат или с използване на специални набори от клавиши или с помощта на палети.

Calculus WIZ се състои от глави и секции, подобно на обикновен учебник по анализ: Функции и графики, Граници, Диференциране, Теорема за средните стойности, Построяване на графики, Приложение на производните, Интегриране, Приложение на интегрирането, Трансцендентни функции, Техники за интегриране, Параметрични и полярни уравнения, Безкрайни редици, Несобствени интегрални, Безкрайни редове, Диференциални уравнения.

Главите и секциите са лесно достъпни чрез Помощно меню и вградени хипервръзки в *Calculus WIZ*. Макар че *Calculus WIZ* е пълен справочник по математически анализ, той също може да помага и в подготовката на домашни задания. Той съдържа шаблонен файл за създаване на домашни работи за всеки студент индивидуално.

Calculus WIZ е организиран в Помощно меню, включващо заглавия, глави, секции и подсекции. Домашното задание с Бележник на *Calculus WIZ* има примерни упражнения със средна трудност. Те са решени по три различни начина: с автоматични *Calculus WIZ* солвъри, с методите на обикновен учебник и с кратки шаблонни програми. Трите начина ви дават възможност да сравнявате подходите. Тук е даден един пример от Помощното меню. Ръчното решаване е обяснено както следва.

Calculus WIZ
File Edit Format Kernel Find Window Help

Help Browser
Go To: CalculusWiz 17.1.3 Back Hide Categories

Calculus WIZ Built-in Functions Other Information
Getting Started Master Index

Table of Contents
Calculus WIZ Text
Solvers

Conics
Parametric and Polar Equation
Infinite Sequences
Improper Integrals
Infinite Series
Differential Equations
Index

Separable
First-Order Linear
Second-Order Linear
Forced Second-Order

Definition
Solutions
Separation of Variables
Initial Value Problems
Exercises

■ **Example: hand solution of $\frac{dy}{dx} = e^y \text{Cos}[x]$**

First, the equation

$$\frac{dy}{dx} = e^y \text{Cos}[x]$$

is separable and may be written in differential form as

$$e^{-y} dy = \text{Cos}[x] dx.$$

Second, the integrals are easy to compute.

$$\int e^{-y} dy = \int \text{Cos}[x] dx$$

$$-e^{-y} = \text{Sin}[x] - c, \text{ or}$$

$$e^{-y} = c - \text{Sin}[x], \text{ for a constant } c.$$

■ Пример: ръчно решаване на $\frac{dy}{dx} = e^y \text{Cos}[x]$

Най-напред, тъй като това уравнение е с разделени променливи, то може да се запише в диференциална форма като

$$e^{-y} dy = \text{Cos}[x] dx .$$

След това лесно пресмятаме интегралите.

$$\int e^{-y} dy = \int \text{Cos}[x] dx$$

$$-e^{-y} = \text{Sin}[x] - c, \text{ или}$$

$$e^{-y} = c - \text{Sin}[x], \text{ където } c \text{ е константа.}$$

Следва решението на същата задача с кратката *Calculus WIZ* шаблонна програма:

Calculus WIZ
File Edit Format Kernel Find Window Help

Help Browser
Go To: CalculusWiz 17.1.3 Back Hide Categories

Calculus WIZ Built-in Functions Other Information
Getting Started Master Index

Table of Contents
Calculus WIZ Text
Solvers

Conics
Parametric and Polar Equation
Infinite Sequences
Improper Integrals
Infinite Series
Differential Equations
Index

Separable
First-Order Linear
Second-Order Linear
Forced Second-Order

Definition
Solutions
Separation of Variables
Initial Value Problems
Exercises

▼ *Calculus WIZ* example: solution of $\frac{dy}{dx} = e^y \text{Cos}[x]$

EVALUATE CALCULUS WIZ INPUT

```
In[4]= Clear[x, y, f];
f[x_, y_] := e^y Cos[x];
DSolve[y'[x] == f[x, y[x]], y[x], x]
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

```
Out[6]= {{y[x] -> -Log[C[1] - Sin[x]]}}
```

Notice the C[1] in *Calculus WIZ*'s solution. This stands for an arbitrary constant.

Продуктът Mathematical Explorer

Mathematical Explorer е електронна книга от 15 глави: Прости числа, Математически анализ, Формули за пресмятане на π , Въртене на квадрати, Мощта на контролните цифри, Секретни кодове, Забавна математика, Изучаване на шаблоните на Ешер, Вариации от рози, Преобърнатата фрактализация, Шаблони на хаоса, Последната теорема на Ферма, Хипотеза на Риман, Неизползваема числова система, Теорема за четирите цвята. Всяка глава има няколко подглави. Включени са много повече математически теми, отколкото може да се съди по заглавията на главите. Читателят ще опознае непрекъснатите дроби, диофантовите уравнения, модулната аритметика, проблема на Бюфон-Нидъл, числата на Фибоначи, задачата за брахистохроната, покрития с пространствени криви и др. Във всяка глава са включени исторически бележки и кратки биографии на най-големите математици, които са допринесли за съответната тема (вкл. Евклид, Ферма, Гаус, Нютон, Риман, Вайл и много други). В Помощното меню, секция Демонстрации, могат да се намерят много интересни примери на символно-числени пресмятания като: 33 представяния на константата на Каталан, решение на уравнението на Нютон с редове, изчисляване на многополюсно поле и др. Тези демонстрации са допълнителни и не са свързани с основните теми на книгата.

Mathematical Explorer е самостоятелен продукт, основан на технологията на *Mathematica*, (за изчислителна машина също се използва ядрото на *Mathematica 4*). Използват Бележниците на *Mathematica*, комбиниращи текст, графики и формули с лесно използваем интерфейс, който е напълно интерактивен и позволява създаването на анимации. Потребителският интерфейс на електронния текст на *Mathematical Explorer* е базиран на Помощното меню на *Mathematica*. Затова глави, секции и подсекции могат да се избират с щракване на мишката. Също така, могат да се търсят концепции, математически биографии, цитати и пр., както и да се четат цитати от самата *Mathematica*. За да изследва или експериментира, потребителят се насочва да избере израз или програма на *Mathematica*, която се активира с натискане на Shift и Enter. Резултатите могат да са забавни – създават се графики и таблици, често се манипулират и опростяват сложни алгебрични изрази, избягват се дълги ръчни изчисления. Текстът се визуализира в светъл и приятелски тон. Читателят е предизвикан с голем брой примери към всяка тема.

Целта на продукта *Mathematical Explorer* е най-добре обяснена в неговото Въведение:

“ *Mathematical Explorer* е интерактивно пътуване през най-увлекателните задачи в историята на математиката – задачи, които са предизвиквали математиците от древна Гърция до съвременността. То минава през теми, които са решени едва наскоро, като последната теорема на Ферма и компютърното доказателство теоремата за четирите цвята, но също така различава и все още нерешени проблеми като хипотезата на Риман.

Изложението на всяка тема е оформено да бъде едновременно образователно и занимателно, като включва ясно обяснение на важните понятия с увлекателни културни и исторически детайли. Много теми имат силна изчислителна жилка, докато други най-лесно се разбират чрез графична визуализация. В *Mathematical Explorer* са интегрирани мощна изчислителна машина и интерфейс, които разчитат на технологията, разработена от създателите на *Mathematica*, с присъщата печеливша изчислителна система на Wolfram Research. С продукта *Mathematical Explorer* можете да извършвате широк диапазон от числени и символни изчисления, да създавате неограничени масиви от графики, с чиято помощ по-добре ще проникнете в идеите, които разработвате.

Mathematical Explorer е предвиден като отворено-затворен интерактивен ресурс от съвременната световна математика, който ви позволява да вървите по изчислителните стъпки на най-големите математици и да докосвате чудото на откривателството, което е омайвало аматьорите и професионалистите през вековете.”

Пример от главата Прости числа:

The screenshot shows the 'The Mathematical Explorer' software interface. The title bar reads 'The Mathematical Explorer' and the menu bar includes 'File', 'Edit', 'Cell', 'Format', 'Input', 'Kernel', 'Find', 'Window', and 'Help'. Below the menu bar is a 'Help Browser' window with a 'Go To' field containing '1.3.1' and buttons for 'Back' and 'Hide Categories'. There are several navigation buttons: 'Main Contents', 'Getting Started', 'Demos', 'Other Information', 'Reference Guide', and 'Master Index'. A tree view on the left shows the following structure:

- Preface
- Prime Numbers (selected)
- Calculus
- Formulas for Computing Pi
- Square Wheels
- The Power of Check Digits

The 'Prime Numbers' folder is expanded, showing:

- Introduction
- What is a Prime?
- How Many Primes?
- Questions on Euclid's Proof (selected)
- Certainty of Primality
- Importance of Primes
- Inspect Prime Number

The main content area displays the title 'Prime Numbers' and a sub-section 'Questions Raised By Euclid's Proof'. Under this, 'Question 1' is highlighted. The text reads: 'After thinking about [Euclid's proof](#) that there are an infinite number of prime numbers, several questions, still unresolved today, immediately come to mind. The following question is easy to investigate.'

Question 1: How often is an integer of the form $1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \dots$ prime?

Numbers of the form $1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ are called **Euclid numbers**.

The expression $\prod_{i=1}^n i$ is a mathematical notation used to represent the product of the integers 1 through n . So for example, the following gives the

Прости числа

Въпроси, възникващи от доказателството на Евклид

Въпрос 1

След като помислим над доказателството на Евклид за съществуването на безброй много прости числа, веднага ни идват наум някои въпроси, все още нерешени и до ден днешен. Следният въпрос е лесен за изследване:

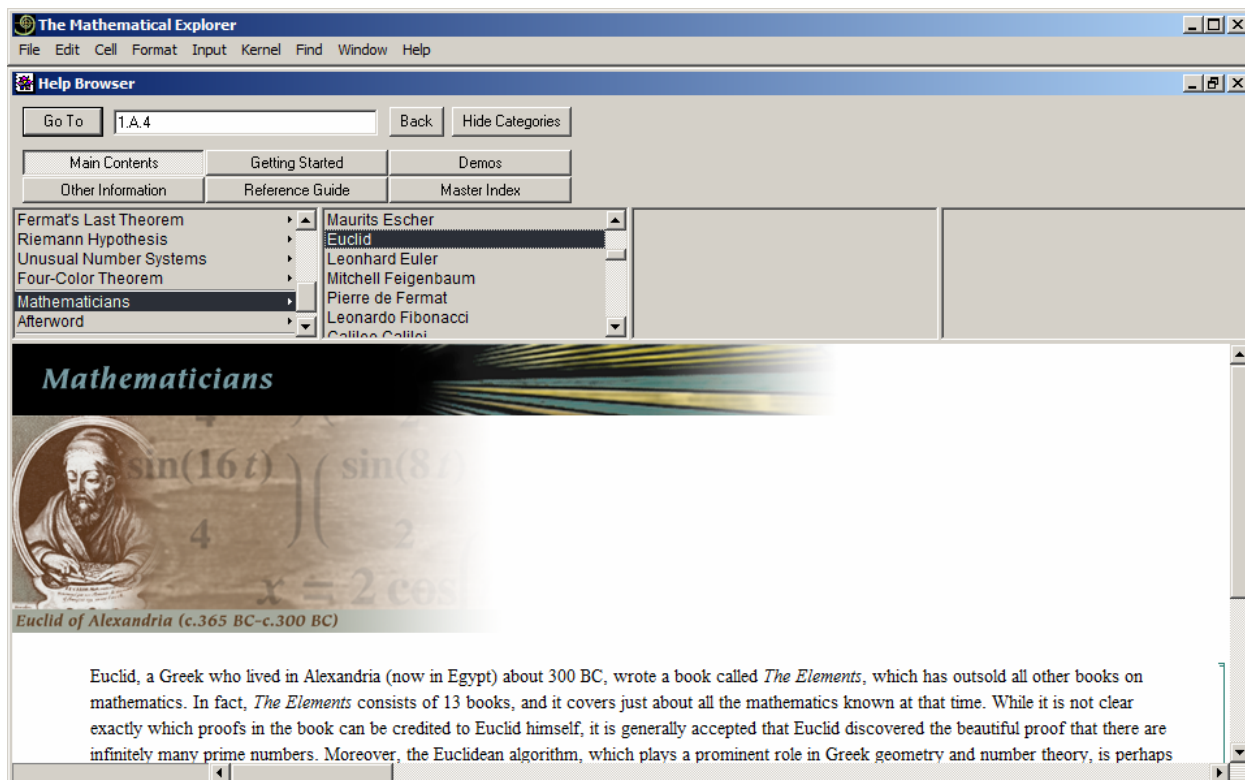
Въпрос 1: Колко често цяло число от вида $1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \dots$ е просто?

Числа от вида $1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ се наричат числа на Евклид.

Изразът $\prod_{i=1}^n i$ е математическо означение за представяне на произведението на числата от 1 до n .

Например, следното дава ...

Пример от биографията на математик:



Математици

Евклид - грък, роден в Александрия (днешен Египет) около 300 години преди н.е. е написал книгата "Елементи", която е обобщила всички други книги по математика. Реално "Елементи" се състои от 13 книги и обхваща почти цялата математика, известна по онова време. Макар и да не е точно ясно кои доказателства от книгата са създадени от самия Евклид, обикновено се приема, че Евклид е открил доказателството, че има безброй много прости числа. Освен това, алгоритъмът на Евклид, който играе забележителна роля в гръцката геометрия и теория на числата, може би е ...

Стен Вейгън, авторът на софтуера на *Mathematical Explorer*, казва: "С всяка изминала година, все повече и повече математици стават експериментатори по природа, след много часове, прекарани в изчисления, необходими за разкриването на нови зависимости и формули. Следствие от този изчислителен уклон в повечето дялове на математиката - както класически, така и модерни е, че те стават достъпни и на хора без специализирана подготовка. Това се случва благодарение на факта, че сложни алгоритми и методи за визуализация, които са били по силите само на няколко специалисти от дадена област, сега са отворени за целия свят. *Mathematical Explorer* е опит да се покаже как елементарни изчисления могат да хвърлят светлина върху много удивителни конструкции от лесно разбираемата теорема за четирите цвята и последната теорема на Ферма до много по-абстрактната и много по-важна хипотеза на Риман."

Други важни характеристики на Calculus WIZ и Mathematical Explorer

Както всички продукти, базирани на *Mathematica*, и двата продукта - *Calculus WIZ* и *Mathematical Explorer*, поддържат процедурен функционален (LISP програмен стил, използващ чисти функции) и програмни парадигми, основани на правила. По тази причина, техните потенциални възможности не са

ограничени до предварително определени шаблони, а могат да се използват и по съзидателен начин, за писане на собствени потребителски програми.

Лесно можем да създаваме таблици от стойности на функции:

Table[Sin[x], {x, 0, Pi, Pi/6}]

$\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$

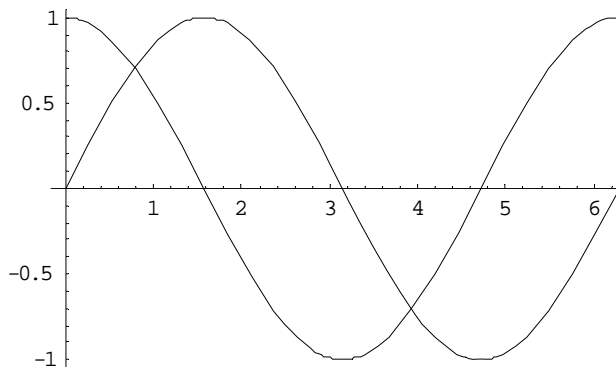
Като използваме предимството на стила на функционалното програмиране, можем да пишем кратки и елегантни програми. Тук създаваме таблица от производните /примитивните функции на даден списък от функции и ги подреждаме в красива таблица:

{(#, D[#, x], Integrate[#, x]) & /@ {Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x], ArcTan[x]}} // TableForm

Sin[x]	Cos[x]	-Cos[x]
Cos[x]	-Sin[x]	Sin[x]
Tan[x]	Sec[x] ²	-Log[Cos[x]]
Cot[x]	-Csc[x] ²	Log[Sin[x]]
ArcTan[x]	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \text{ArcTan}[x] - \frac{1}{2} \text{Log}[1+x^2]$

Също така е лесно да правим графики на функции и да ги комбинираме:

Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2 Pi}]



Програмирането, базирано на правила може да се използва, за да се направят преобразования, напр. субституции (полагания) при решаване на уравнения.

Sin[x]^2+Cos[x]==1/2 /. Sin[x] -> Sqrt[1-Cos[x]^2]

$$1 + \text{Cos}[x] - \text{Cos}[x]^2 = \frac{1}{2}$$

Символът % се отнася за резултата от предходното изчисление.:

% /. Cos[x] -> z

$$1 + z - z^2 = \frac{1}{2}$$

Командата Solve решава горното уравнение, което замества в Solve с %:

`Solve[%, z]`

$$\left\{ \left\{ z \rightarrow \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \right\}, \left\{ z \rightarrow \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \right\} \right\}$$

Резултатът може веднага да се използва за обратно полагане:

`Cos[x] == z /. %`

$$\left\{ \text{Cos}[x] = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}), \text{Cos}[x] = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \right\}$$

и сега можем да решим например първото от тези гониометрични уравнения с командата

`Solve[%[[1]], x]`

`Solve::ifun` Inverse functions are

being used by Solve, so some solutions

may not be found.

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\text{ArcCos} \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \right] \right\}, \left\{ x \rightarrow \text{ArcCos} \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \right] \right\} \right\}$$

Забележете, че се генерира предупреждаващо съобщение, тъй като функцията е необратима в цялата област. Понеже и двата продукта *Calculus WIZ* и *Mathematical Explorer* поддържат изчисления с точни стойности, предишният изходен резултат не е даден числово. Впрочем, ние можем да поискаме числен отговор така:

`N[%]`

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -1.94553 \right\}, \left\{ x \rightarrow 1.94553 \right\} \right\}$$

Заклучение

Двата продукта *Calculus WIZ* и *Mathematical Explorer* са самостоятелни продукти, разработени на базата на стабилната технология на *Mathematica*. Те са подходящи както за развитие на математическите идеи чрез готови форми, така и за програмиране, подходящи за студенти. И двата продукта поддържат основния програмен език на (с някои ограничения), с неговите базирани на правила, функционални и процедурални парадигми. Поддържат се и много команди на *Mathematica* за манипулиране на формули, символно/числено интегриране и др. Те не поддържат команди на *Mathematica* за обработка на големи множества от данни, тъй като те не са за знания, изчаващи се в последните класове на гимназията или от първи курс студенти. Също така има и някои ограничения спрямо пълната версия на *Mathematica*. *Calculus WIZ* и *Mathematical Explorer* се препоръчват за използване от ученици в последните класове на гимназията или в първи-втори курсове на университетите.