НЯКОИ ИДЕИ ЗА ИЗПОЛЗВАНЕТО НА СИСТЕМИ ЗА КОМПЮТЪРНА АЛГЕБРА (СКА) ЗА ПРЕПОДАВАНЕ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ С МНОГО ПРОМЕНЛИВИ

Херардо Родригез
Университет на Саламанка

1. Въведение

През изминалите 20 години Испания стана свидетел на въвеждането на СКА (Системи за Компютърна Алгебра) като допълнение в преподаването и математическото обучение на студентите по инженерни науки. Като цяло обаче, това не е съпроводено от необходимите промени в методите на преподаване, за да се извлече оптимална полза от този тип пособие. Най-често, преподавателите просто използват компютъра, за да направят абсолютно същото, което може да се направи с химикал и хартия. Това довежда до претоварване с работа, като СКА се използват механично, а не за реално преподаване на математика. Истинското предназначение на СКА (да предложи пособие за прилагане и изучаване на математика) е подменено от ситуация, в която студентите се научават да работят със СКА, без да разбират добре математическите изчисления, с които те оперират.

Целта на тази глава е да демонстрира по-интегрирана и хармонична употреба на СКА (*Maple*, *Mathematica* или която и да е друга) във всекидневната преподавателска практика. По-точно ще направим опит да покажем възможностите за използване на СКА за изнасяне на курс по диференциално смятане с много променливи. Курсът е резултат от нашия опит като преподаватели по математика в инженерни факултети в няколко различни испански университета, където се използва *Mathematica* или *Maple*.

2. Началото

В инженерните факултети, диференциалното смятане с много променливи обикновено се преподава след един семестриален курс по Въведение в математическия анализ. Обичайните теми в тази област са: основна представа за R^2 и R^3, граници, насочени и частични производни, хомогенни функции, верижно правило, неявно диференциране, обратна функция, формула на Тейлър, максимуми и минимуми, множители на Лагранж.

Обикновено са отделени 30 учебни часа (за теория и за практика) за преподаването на този материал и се приема, че индивидуалната работа на всеки студент ще съответства на същия брой часове.

Целта е студентите да придобият знания за понятията и уменията за самостоятелни пресмятания, които по-късно да се приложат за решаването на математически задачи или в специфични инженерни дисциплини, и освен това да знаят кога и как да използват СКА за решаването на математически задачи..

Освен това е необходимо да се подчертае, че студентите трябва да придобият основни познания за СКА, които се използват (*Mathematica* или *Maple*, в зависимост от университета).

Затова, с оглед на липсата на достатъчно учебно време за преподаване, ако горепосочените цели трябва да се постигнат, се изисква нов методологичен подход.

3. Преподавателските материали

За да се проведе методологичният план, са съставени преподавателски материали за стандартен курс по многомерен анализ. Тези материали представляват учебник, който систематично включва теоретични понятия, предложени и решени задачи (виж García, A., López, A., Romero, S., Rodríguez, G., de la Villa, A., 2002), заедно със CD, което включва задачи, решени с помощта на СКА.

Описание на материала, включен в CD-то е представено надолу; по-точно на този, който се отнася до диференциалното смятане с много променливи, и в същото време се обяснява стратегията, която е следвана за съставянето му. Отбелязано е, че CD-то включва две алтернативни директории с паралелно съдържание: едната спомага за използването на *Maple,* а другата за *Mathematica*. Съобразно с това, примерите, предложени в този труд, могат да бъдат използвани в която и да е от двете системи.

Тези преподавателски материали включват всички горепосочени теми и позволяват диференцираната им употреба от преподавателя при всеки конкретен случай. Въз основа на личните критерии на преподавателя, материалите могат да бъдат използвани или като материали по време на групово занятие, или като указание за индивидуалната работа на студентите, като се съобразят с личните качества на студента и определеното време за развиването на различните теми.

Разглежданото проучване трябва да помогне за намаляването на липсата на материали за преподаването на математически анализ на много променливи, поне на испански език, в сравнение с обширното количество материали, налични понастоящем за преподаването на диференциално и интегрално смятане с една променлива.

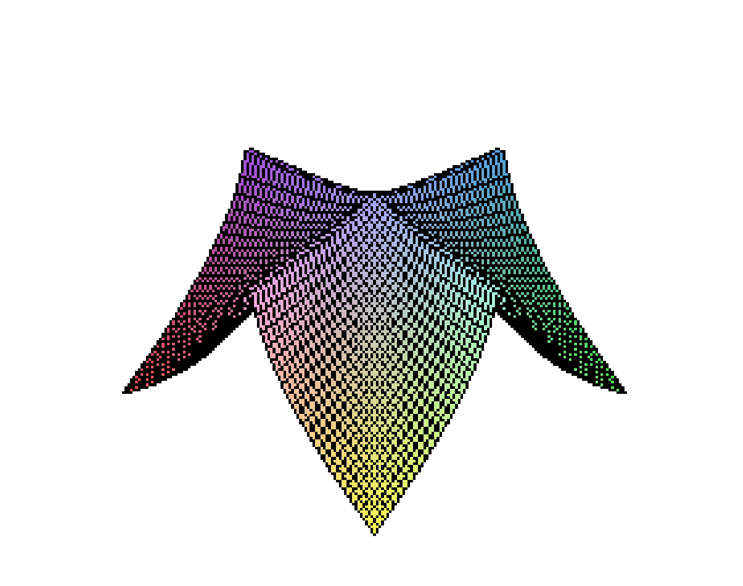
4. Методологичен план

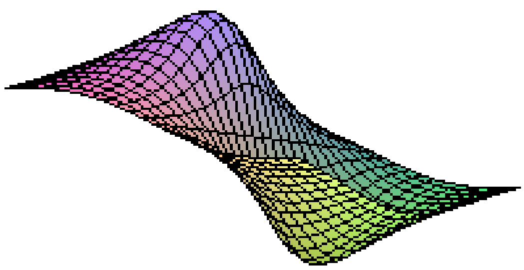
Методологичният план е базиран на съчетаване на традиционното преподаване, лекции и упражнения (с въвеждането на различни понятия и упражнения на дъската), с лабораторни часове, в които съответната СКА е използвана да подсили теоретичните понятия и решаването на задачи.

Предложеният методологичен план предполага, че студентите отделят приблизително една трета от цялото време за обучение, заложено по дисциплината (комбинирани учебни часове в клас и индивидуална подготовка) на употребата на СКА, като следват указанията на преподавателя и се стремят да постигнат следните цели:

4.1. **Подобряване на визуализацията**

Възможността да се скицира графика на повърхнина незабавно дава допълнителна информация при изучаването на функция с две променливи, като се правят предположения за свойствата на функцията, например екстремуми, граници и т.н. Например следващите фигури, и двете получени с въведени начални данни в *Maple*, помагат на студентите да разберат понятия като недиференцируемост и относителни екстремуми.





Графическите възможности на СКА могат също да бъдат използвани от преподавателя за презентации, които ще помогнат за въвеждането на различни математически понятия. Обаче, трябва да се отбележи, че понякога се налага по-сложно програмиране, за да се постигнат „добрите” презентации на графики и преподавателят трябва да вземе предвид какво се изисква за възпроизвеждането им.

4.2. Експериментиране

Възможността да се извършват дълги еднообразни математически изчисления за кратко време позволява въвеждането на нови стратегии за решаването на задачи, различни от числените, аналитичните и графичните техники.

Така например, със СКА е лесно да се разберат променливите, които могат да бъдат избрани като зависими в теоремата за неявни функции. За да се направи това, ако се приеме че останалите хипотези на теоремата са спазени, е необходимо само да се провери дали детерминантата на матрицата на Якоби е нула или не. Така че, дори и системата от неявни функции да е сложна, задачата се свежда до автоматично изчисление.

Също така, за да се придобие първоначална идея за съществуването на граница на функция, може да се направи графика или да се пресметнат таблици със стойности на функцията близо до границата. Например, за да се изучи съществуването на границата на функцията $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в началото на координатната система, се въвеждат в *Mathematica* данните:

```
TableForm[Table[f[a + j h, b + k h], {j, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

и при a=b=0, h=0.001, k=0.001, n=5 системата генерира следната таблица:

0.5	0.4	0.3	0.235294	0.192308
0.4	0.5	0.461538	0.4	0.344828
0.3	0.461538	0.5	0.48	0.441176
0.235294	0.4	0.48	0.5	0.487805
0.192308	0.344828	0.441176	0.487805	0.5

Дисперсията на данните в тази таблица води до предположението, че границата не съществува, което може да бъде доказано чрез прилагането на метода на намирането на две подмножества, за които границите са различни, например, $y=x$ и $y=2x$.

Като част от стратегията на преподаване, студентите трябва да бъдат окуражавани да експериментират при опитите си за решаване на задачи. Решаващ аспект е да се избегне безделието при правенето на различни опити, тъй като механичните процеси се извършват от компютъра.

4.3. Съкращаване на механичните изчисления

Необходимостта студентите да придобият основни умения по изчисляване не трябва да се пренебрегва. Щом е установено, че студентите са усвоили понятията и че могат да извършват „операции” на ръка в случаи на изчисления, които не са твърде сложни, тогава те могат да използват СКА като “висша изчислителна машина” за по-дългите изчисления. Така например, при “верижното правило” матрицата на Якоби на функцията $g \circ f$ е произведение на матриците на Якоби на g и f. Когато съставните функции f и g съдържат сложни изрази, матрицата на Якоби на функцията $g \circ f$, с $f: \Re^5 \rightarrow \Re^6$ и $g: \Re^6 \rightarrow \Re^4$ изисква тежки изчисления при “ръчно” пресмятане, което може да бъде извършено автоматично със СКА.

Следователно, СКА, разглеждани като “висши изчислителни машини”, могат да бъдат използвани в повечето области на диференциалното смятане.

Също така, безспорна е ползата от такива пособия в междинни изчисления, свързани с понятия, които са вече анализирани и са необходими за по-късните етапи на обучение. Например, хипотезите за съществуването на обратна функция могат да бъдат анализирани с помощта на СКА, тъй като изчисленията, свързани с проверката на такива хипотези са рутинни. Затова употребата на СКА позволява на потребителя да спести време при рутинните изчисления, което може да бъде по-добре оползотворено за моделирането на задачи, които включват реални ситуации и за интерпретирането на постигнатите резултати на всеки етап от процеса.

За пример са разгледани следните задачи (взети от García, A., López, A., Romero, S., Rodríguez, G., de la Villa, A., 2002):

Температурата на чиния, в който и да е момент, (x,y) се задава с функцията T(x,y) = 25 + $4x^2 - 4xy + y^2$*. Топлинна аларма, разположена изцяло на окъжността* $x^2 + y^2 = 25$ *се задейства при температура по-висока от 180ºC или по-ниска от 20ºC. Ще се задейства ли алармата?*

За да решат този проблем, студентите трябва да оптимизират T(x,y) при условие $x^2 + y^2 = 25$. В случая може да бъде използван методът на множителите на Лагранж. Изчисленията се извършват с помощта на компютър и точките

$$\{-2\sqrt{5}, \sqrt{5}\}, \ \{2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}, \{-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\}, \ \{\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\}$$

се получават като възможни решения. Студентите трябва да изчислят стойностите на функцията T в тези точки, за да намерят екстремумите и да интерпретират резултата. Тъй като максимумът на тези стойности е по-нисък от 180, а минимумът е по-висок от 20, алармата няма да се задейства.

Освен това, възможности на СКА за символни изчисления позволяват да се работи ефективно с формални изрази, като тези, свързани със свойствата на операторите. Например лесно е, като се използва *Mathematica*, да се докаже, че *div(grad f)= Δ f*. След зареждането на пакета **Calculus`VectorAnalysis`** входните данни

```
Div[Grad[f[x,y,z],Cartesian[x,y,z]]]-
    Laplacian[f[x,y,z],Cartesian[x,y,z]]
```

дават резултат 0.

В допълнение е възможно да се доказват общи свойства в реални задачи, както е показано в следния пример (взет от Marsden, J. , Weinstein, A., 1985):

Специфичният обем V, налягане P и температура T на газ на Ван дер Ваалс удовлетворяват уравнението $P = \frac{RT}{V-b} + \frac{a}{V^2}$, *където a, b, R са положителни параметри. R е универсалната константа на газовете, b представлява обема на газовите молекули в течно състояние (b<<V) и* $\frac{a}{V^2}$ *представлява вътрешното налягане вследствие на взаимодействието между молекулите.*

Студентите, използвайки теоремата за неявните функции, могат да докажат, че които и да са две от трите променливи *V*, *P*, или *T* могат да бъдат считани за независими, за да се определи третата променлива. Също могат да намерят $\frac{\partial}{\partial P}T$, $\frac{\partial}{\partial V}P$ и $\frac{\partial}{\partial T}V$ и да потвърдят, че $\left(\frac{\partial}{\partial P}T\right)\left(\frac{\partial}{\partial V}P\right)\left(\frac{\partial}{\partial T}V\right) = -1$

Тук СКА е използвана за потвърждаването на хипотезите на теоремата за неявните функции и за избягване на дълги и сложни изчисления.

Съответно на студентите може да се възложи да обобщят тази формула, когато *F* е функция с n променливи.

4.4. Разлика между алгоритмични и не алгоритмични процеси

Употребата на СКА не е панацея, която ще позволи решаването на която и да е математическа задача. В този смисъл е важно да подчертаем, че студентите трябва да правят разлика между процеси, които са алгоритмични и тези, които не са.

Когато един процес може да бъде “алгоритмизиран”, студентите трябва да бъдат окуражавани да извършат проста процедура, която се състои от превеждането на математическия процес на езика на използваната СКА.

Относно алгоритмичните процеси, е уместно да се разграничат два вида:

● Алгоритми със сигурен отговор, при които винаги се получава информация.

Например, може да бъде много лесно за студента да извърши Maple процедура, която ще изчисли допирателната равнина към повърхнината, неявно дефинирана чрез уравнението $F(x,y,z)=0$, в точка (a,b,c). Достатъчно е да се знае дефиницията и да се напишат инструкциите за намиране на градиентния вектор и уравнението на допирателната равнина. Основният вид на тази процедура изглежда така:

```
> Tang_Plane:=proc(F,a,b,c)
 local gr;
 gr:=subs({x=a,y=b,z=c}, linalg[grad](F(x,y,z),[x,y,z]));
 simplify(gr[1]*(x-a)+gr[2]*(y-b)+gr[3]*(z-c)=0)
 end:
```

За да използва тази процедура в други задачи, студентът трябва преди това да провери дали са изпълнени условията за прилагане на теоремата за неявните функции. Процедурата може да се подобри като в нея се включат необходимите инструкции, за да се проверява дали тези условия са наистина изпълнени и да се осигури появата на съобщение за грешка, ако не са. Възможно е също да се добави инструкция за графика, за да се начертае повърхнината, заедно с допирателната равнина. Обикновено студентите се опитват да подобрят процедурата, докато стане възможно най-пълна.

● Алгоритми, които могат да включват изчислителни проблеми.

В този вид алгоритми, отговорът зависи от междинни процеси, които не могат да бъдат извършени, поради непреодолими трудности при решаването на уравнение, прекалени системни изисквания и т.н.

Така например, за изчисляването на условни екстремуми, алгоритъмът на множителите на Лагранж изисква намирането на решението на система уравнения, което е не винаги гарантирано.

Има също не алгоритмични процеси, за които интерактивната употреба на СКА трябва да бъде контролирана. Например, определянето на граници е не алгоритмичен процес.

Възможно е да се формулират алтернативи, като се използват отрицателни критерии като повтарящи се граници или някакъв положителен критерий като преминаване в полярни координати, които трябва да се използват внимателно (виж следващия раздел). Така функцията $f(x,y)$, след полагането $x = a + r\cos\phi$, $y = b + r\sin\phi$, се преобразува във функцията $F(r, \phi)$. Ако тази функция има еднакви лява и дясна граница за променливата ϕ когато $r\to 0$, тогава съществува граница за $f(x,y)$ в точката (a, b).

4.5. Развиване на критично мислене

Ясно е, че СКА може лесно да съдействат за проверка на резултати. Студентите обаче, не трябва сляпо да вярват в компютърните резултати, независимо дали те са междинни или крайни. Вместо това, те трябва през цялото време да се опитват да контролират процеса, така че резултатите да съответстват на контекста на задачата, която се решава при всеки отделен случай. Трябва да се отбележи, че небрежната употреба на СКА може да доведе до грешки, които студентът може да не забележи, например грешки поради повторно използване на променливи, които вече имат присвоени някакви стойности от предишни изчисления в работната сесия.

В допълнение, нерядко, ограниченията на СКА могат да развиват критичното мислене на студентите, особено в случаи, когато отговорът, даден от СКА, е неочакван.

Например, очакваните изходни данни на Maple инструкцията

```
> mtaylor(sin(x*y)/(x*y), [x=0, y=0],10);
```

би трябвало да са $1-\frac{x^2y^2}{6}+\frac{x^4y^4}{120}$, но изходните данни на компютъра са $1-\frac{x^2y^2}{6}$.

Освен това, СКА може да даде грешен резултат поради грешка в програмата или поради съобразяването с условия за променливите, които операторът не е взел предвид (виж Alonso, F., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G., de la Villa, A., 2001).

Например, нека при изчисляването на граница в точката (1,1) на функцията

$$f(x,y)=\frac{3x-3x^2+x^3-4y+6y^2-4y^3+y^4}{-2+3x-3x^2+x^3+4y-6y^2+4y^3-y^4}$$

се използва преобразуване в полярни координати (виж 4.4), където $a=b=1$, при което изразът се преобразува в $F(r,\theta)=\frac{\cos(\theta)^3+r\sin(\theta)^4}{\cos(\theta)^3-r\sin(\theta)^4}$.

Mathematica и Maple опростяват границата на този израз до 1 когато $r\to 0$. Това предполага, че границата не зависи от θ, но предположението е грешно, тъй като ако $\theta=\pi/2$, границата е –1. Следователно границата не съществува .

Студентите трябва да видят необходимостта от контролиране на резултатите.

5. Заключение

Целта на тази статия е да предложи начин за използването на математически софтуер като педагогическо средство. Графичните възможности на софтуерните пакети могат да помогнат за разбирането на някои понятия, свързани с диференциалното смятане с много променливи.

Също така са разгледани и други възможности за употребата на СКА като: намаляване на механичната работа, възможност за експериментиране, разграничаване между алгоритмични и не алгоритмични процеси и развиване на критичното мислене към получаваните резултати. В допълнение е необходимо да споменем колко е важно да се промени отношението на преподавателите към тези теми.

Следователно, избраният софтуерен пакет не трябва да е по-важен от начина , по който е използван. Същите идеи и методи относно софтуера в образованието могат да бъдат приложени като се използват различни пакети. Възможностите за използване на нови технологии не са ограничени до преподаване „с присъствие” (тоест, с физическото присъствие на студентите). Събраният преподавателски материал може да бъде използван при “виртуално” преподаване, тъй като няма специфични проблеми за представянето на материала онлайн. Във всички случаи, учебният материал може да бъде допълнен с консултации, които да подпомогнат неговото изучаване.

БИБЛИОГРАФИЯ:

- Alonso, F., García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G., de la Villa, A , 2001, "Some unexpected results using Computer Algebra Systems ", *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, **8**, 239-252.
- García, A., López, A., Romero, S., Rodríguez, G., de la Villa, A., 2002, *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. Clagsa.
- Marsden, J. And Weinstein, A., 1985, *Calculus III*. Springer-Verlag.