

## ИЗПОЛЗВАНЕ НА ИНТЕРАКТИВНИ КОМПЮТЪРНИ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ПРЕПОДАВАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ МАТЕМАТИЧЕСКИЯ АНАЛИЗ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Николинка Бъчварова

**Резюме:** В статията се разглежда необходимостта от използване на интерактивни компютърни технологии (ИКТ) при изучаване на елементи от Математическия анализ. Доказва се целесъобразността от използването на динамични компютърни графики, които повишават нагледността при преподаване на учебния материал и при решаването на задачи, свързани с него. Обосновава се използването на интерактивната геометрична среда GeoGebra за демонстрация на модели и като средство за самоконтрол в обучението по математика. Практическото приложение на разработката може да се използва от ученици за самостоятелна подготовка по математика, а така също и от преподаватели по математика при изучаване на теми, свързани с елементи на Математическия анализ и „Параметрични уравнения“. За илюстриране на идеите са използвани примери от реалната учебна практика.

**Ключови думи:** информационни компютърни технологии, динамична геометрична среда, анимация, производна.

### Въведение

Новите социални потребности на обществото определят и целите на образованието като общокултурно, личностно и познавателно развитие на учениците, обезпечавашо такава ключова компетенция на образованието като „**умението да се учи**“.

Бурното развитие на техническите средства довежда до възникването на ново педагогическо понятие – „интерактивни компютърни технологии“ в образованието. „Това е съвкупност от съвременни компютърни техники, инструментални програмни средства, обезпечаваша интерактивното програмно-методическо обучение“. Интерактивността най-често се определя като форма на комуникацията между учащите и преподавателите, самите учащи, както и между учащите и учебните ресурси (в които се включва и всяка компютърна система). Интерактивността е много важен елемент от процеса на преподаване и усвояване на учебния материал. Обучаемите трябва да бъдат насърчавани да взимат активно участие в учебния процес (Уикипедия).

При това знанията, уменията и навиците се формират, придобиват и съхраняват в тясна връзка с активните действия на учениците. Качеството на усвоените знания се определя от многообразието на различните стандартни учебни действия. Интерактивните компютърни технологии (ИКТ) се утвърждават като водещи педагогически технологии.

Докладът има за обект основни елементи от Математическия анализ като понятията производна, монотонност на функция, графика на функция, параметър и решаването на различни задачи чрез динамичен софтуер, използван от ИКТ, които подпомагат обучението по математика.

Предмет на тази разработка е представянето, формирането и усвояването на математически знания и умения у учениците, както и прилагането на тези знания при решаване на задачи от Математическия анализ в гимназиалния етап на обучение.

Цел на доклада е да се сподели педагогически опит за по-лесно и ефективно преподаване на учебния материал, което се постига чрез подходящо онагледяване и демонстрации, използвайки анимация и други специални ефекти, да се покаже възможността за използване на ИКТ и ефективността от прилагането им чрез динамичната компютърна среда *GeoGebra* при преподаването на елементи от Математическия анализ и при решаването на задачи, свързани с него в средното училище.

Основна задача на този материал е да обоснове нуждата от използването на ИКТ при преподаване на елементи от Математическия анализ и решаване на математически задачи от този вид.

### **Използване на ИКТ в обучението по математика**

Използването на ИКТ в учебния процес не е самоцелно, а само в тези случаи, в които се предлагат на учениците по-нови в сравнение с традиционните форми за обучение възможности, които действително способстват обезпечаването на качествено обучение.

Пред всеки редови учител по математика стои проблем – при ограничения часови ресурс, да се справи с преподаването на големия обем на учебното съдържание, като спазва инструкциите и препоръките, които трябва да прилага в работата си, с което да спомогне за максимално усвояване от обучаемите на предвидените умения и знания за съответния клас. С други думи – нужна е изключително добра организация и ефикасна интензификация на учебния процес, които да се реализират с персоналните усилия на всеки отделен преподавател (Бизова-Лалева, 2016, стр. 14).

Какво са ИКТ за един преподавател?

- ресурс за формиране на универсални учебни дейности;
- ресурс за повишаване ефективността на урока по математика;
- ресурс за самоусъвършенстване на преподавателя.

Това дава възможност за използването на средствата на ИКТ във всеки учебен предмет, в това число и по математика.

Съществуват няколко възможности на използване на ИКТ в учебния процес:

- като технология върху отделни елементи: компютърно обучение по отделни теми, раздели, за отделни дидактически задачи;
- като основна, определяща, значима част от използваните технологии;
- като монотехнология: когато цялото обучение, цялото управление на учебния процес, включвайки диагностика и мониторинг, се основава на използването на компютърните технологии.

Друг важен въпрос е дали на всяка цена и за всякакъв вид урок е необходимо използването на новите технологии и доколко е ефективен урокът при използването им? Това е преценка отново на учителя (Старибратов, 2012, стр.14). Именно преподавателят може точно да определи в каква степен и на какъв конкретен етап може

да се използват ИКТ в урока по математика. Отговор може да се получи от „живата“ реакция на учениците.

Много голям процент от учениците в гимназиалния етап на обучение имат сериозни трудности в разбирането на основните понятия, свързани с Математическия анализ. В резултат на това преподаването му представлява сериозен проблем в обучението по математика. Как преподаването на основни елементи от Математическия анализ би могло да стане по-ефективно? Процесите и понятията могат по-лесно да бъдат разбрани в среда, която може да разкрие техните съществени компоненти, т.е. динамична среда (CALGEO, 2007, стр. 9).

Една такава свободно разпространяема и бързо развиваща се среда е *GeoGebra* (*GeoGebra*, 2017). Чрез нея може да се създават динамични изображения, които се използват при преподаването на елементи от Математическия анализ в училищния курс по математика. При това съществува остър недостиг на учебна литература, специализирана за използването на този ресурс в преподаването на Математически анализ.

От методическа гледна точка средата *GeoGebra* позволява да се създават компютърни динамични чертежи и графики, които могат да се използват на различни етапи от преподаването на учебния материал – от чертежи с илюстративен характер до изследователски чертежи. Особено полезен понякога е процесът на създаване на динамичен чертеж. В резултат на компютърното моделиране чрез тази динамична среда много математически понятия и теореми стават за учениците „видими“ и „разбираеми“.

Чрез следващите примери ще споделя личния си опит за създаване и демонстрации на компютърни чертежи и анимирани решения на задачи, свързани с изучаването на основни понятия от Математическия анализ по ЗИП математика, с ученици от 12 клас от МГ „Акад. К. Попов“ гр. Пловдив. За осъществяването на тези идеи съм използвала свободния обучителен и динамичен софтуер *GeoGebra* (Димкова, 2012).

За да достигнат учениците до дадено умозаключение и формулират хипотеза, свързана с откриването на свойства или алгоритми на действие при изследване на някакъв математически обект, е необходимо да се разгледат различни единични случаи, многократното да се повторят дадени действия, да се съпоставят и анализират резултати от тези действия. Следващата задача дава възможност да се приложат на практика тези дейности, като по този начин се стимулира изследователската дейност на учениците.

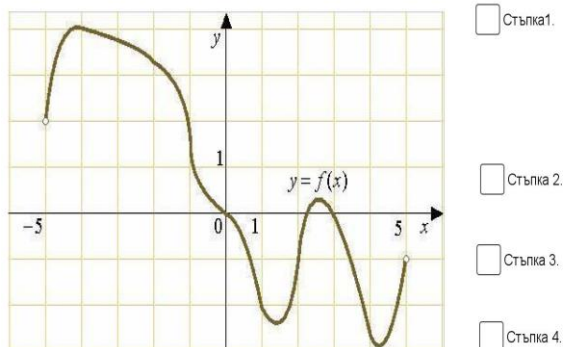
**Задача 1.** *На чертежа е изобразена графика на функцията  $y=f(x)$ , определена в интервала  $(-5;5)$ . Намерете броя на целите точки от абсцисната ос, в които производната на функцията  $f(x)$  е отрицателна.*

Задачата има за цел да упражни прилагането на една важна теорема от Математическия анализ, която свързва монотонността на една функция с нейната производна, а именно: Критерий за монотонност (Лозанов, 2002, стр.43).

Решението на задачата чрез динамичната среда *GeoGebra* протича през три етапа:

1. Геометрично моделиране на условието на задачата върху дисплея на монитора, електронна дъска, мултимедиен екран и други (фигура 1).

Задача 1. На изображението е начертана графиката на функцията  $y=f(x)$ , дефинирана в интервала  $(-5;5)$ . Определете броя на целите точки от абсцисната ос, в които производната на функцията  $f(x)$  е отрицателна.



- Стъпка 1.
- Стъпка 2.
- Стъпка 3.
- Стъпка 4.

Фигура 1.

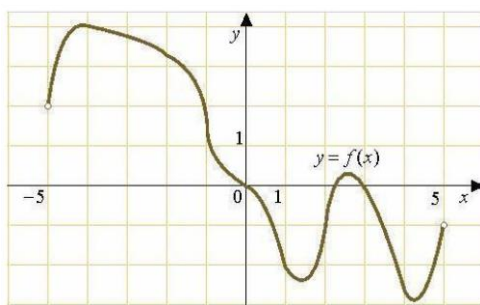
2. Решаване на задачата с използване възможностите на динамичния софтуер.

При тази демонстрация на решението чрез чек-бутони се избират стъпките, които ще се изследват от учениците. Това дава свобода на преподавателя да избира кои етапи от решението ще демонстрира и кои резултати ще се сравняват, обобщават и съответно проверяват. При избора на съответната стъпка до чек-бутона се появява пояснителен текст, който помага на учениците да сравнят своите решения с тези от демонстрацията.

3. Построяване по стъпки на математическия модел на решението, което се вижда на дисплея (фигура 2, фигура 3 и фигура 4).

На фигура 2 учениците могат да си припомнят Критерия за монотонност (необходимо условие), който трябва да приложат за успешното решаване на задачата, а на фигура 3 те могат да сравнят своите отговори с интервалите, в които функцията намалява, т.е. производната е отрицателна.

Задача 1. На изображението е начертана графиката на функцията  $y=f(x)$ , дефинирана в интервала  $(-5;5)$ . Определете броя на целите точки от абсцисната ос, в които производната на функцията  $f(x)$  е отрицателна.

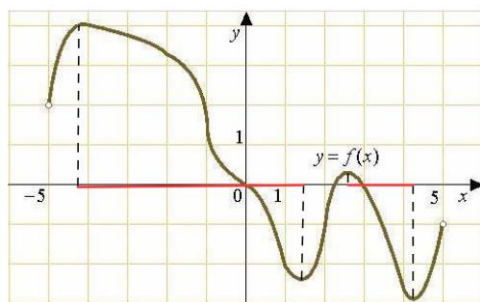


- Стъпка 1.
- Стъпка 2.
- Стъпка 3.
- Стъпка 4.

Критерий за монотонност (необходимо условие за монотонност):  
Ако функцията  $f(x)$  е растяща (намаляваща) и диференцируема в отворения интервал  $(a,b)$ , то производната  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) в отворения интервал  $(a,b)$ .

Фигура 2.

Задача 1. На изображението е начертана графиката на функцията  $y=f(x)$ , дефинирана в интервала  $(-5;5)$ . Определете броя на целите точки от абсцисната ос, в които производната на функцията  $f(x)$  е отрицателна.



- Стъпка 1.
- Стъпка 2.
- Стъпка 3.
- Стъпка 4.

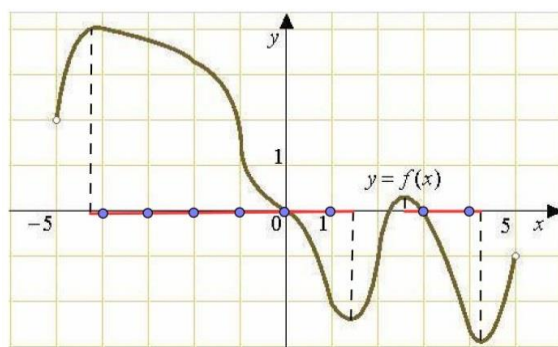
Критерий за монотонност (необходимо условие за монотонност):  
Ако функцията  $f(x)$  е растяща (намаляваща) и диференцируема в отворения интервал  $(a,b)$ , то производната  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) в отворения интервал  $(a,b)$ .

Ще намерим интервалите, където функцията намалява.

Фигура 3.

На фигура 4 учениците се запознават с последните две стъпки от решението на задачата. Нагледно се представят целите точки от абсцисната ос и окончателният отговор.

**Задача 1.** На изображението е начертана графиката на функцията  $y=f(x)$ , дефинирана в интервала  $(-5;5)$ . Определете броя на целите точки от абсцисната ос, в които производната на функцията  $f(x)$  е отрицателна.



Стъпка 1.

Критерий за монотонност (необходимо условие за монотонност):  
Ако функцията  $f(x)$  е растяща (намаляваща) и диференцируема в отворения интервал  $(a,b)$ , то производната ѝ  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) в отворения интервал  $(a,b)$ .

Стъпка 2.

Ще намерим интервалите, където функцията намалява.

Стъпка 3.

Ще определим целите числа от получения интервал.

Стъпка 4. **Отговор: 8.**

Фигура 4.

Предимството на така създадената демонстрация е, че решението на задачата може да има фронтален характер, т.е. учителят да поставя въпроси към целия клас. Анализирайки получените резултати, учениците се провокират да изграждат хипотези, истинността на които трябва да докажат или отрекат.

Следващият пример е свързан с приложение на производните при екстремални задачи за решаване на уравнения от по-висока степен с параметър (Лозанов, 2002, стр. 75).

Задачите с параметър са отличен материал за изследователска и проектна дейност на учениците, изискващи логическото мислене и висока математическа култура.

Изследването и решаването на уравнение от по-висока степен с параметър не е лесен раздел от училищната математика. Параметърът като понятие, често се възприема от учениците като много по-сложен, отколкото е в действителност. От друга страна много висши учебни заведения са включили в изпитната си програма такъв тип задачи, което определя тяхната практическа значимост.

**Задача 2.** За кои стойности на параметъра  $a$  уравнението  $x^3 - 12x - a = 0$  има точно две различни решения?

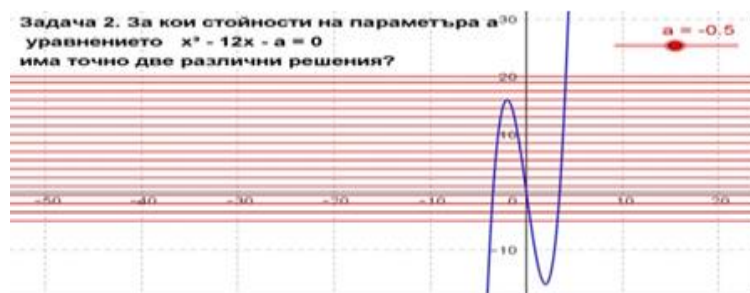
За да се реши задачата, трябва да се преобразува уравнението във вида:

$$x^3 - 12x = a.$$

Разглеждат се две функции:  $f(x) = x^3 - 12x$  и  $g(x) = a$ . Построяват се графиките на функциите  $y_1 = f(x)$  и  $y_2 = g(x)$  на една и съща координатна система. Броят на решенията зависи от броя на пресечните точки на двете графики. В конкретната задача се търсят две различни общи точки при различни стойности на параметъра  $a$ .

Графиката на функцията  $g(x) = a$  е права линия, успоредна на оста (Ox) и пресичаща оста (Oy) в точка  $a$ .

Тъй като  $a$  е параметър, който може да приема различни стойности, то е необходимо да се построи цяла поредица от успоредни прави (фигура 5), пресичащи ординатната ос на различна височина.



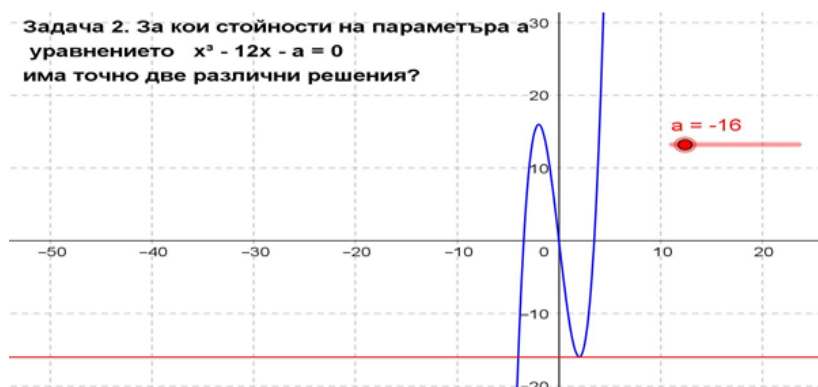
Фигура 5.

Очевидно е, че не е възможно да се построят всички прави, защото те са безкрайно множество.

Решението на задачата може да се демонстрира с компютърна анимация, създадена чрез динамичния софтуер *GeoGebra*. Чрез нея се постига както по-атрактивно и нагледно представяне на математическото съдържание, така и ефективното подпомагане на преподавателя по математика (Върбанова, Алексиева, Лалчев, 2008, стр. 211).

Предимствата на *GeoGebra* са, че могат да се правят демонстрации на разположението на графиките при различните стойности за параметъра  $a$ , като стъпката за променяне стойността на параметъра може да се задава от преподавателя. Учениците имат възможност да сравняват разположението на двете графики при различни стойности на параметъра и да разсъждават за пресечните им точки. По този начин се достига до правилни изводи за решенията на уравнението.

Стойността на параметъра може да се променя по два начина: или ръчно чрез промяна стойностите на плъзгача, или автоматично, използвайки анимация. Манипулирайки движението, преподавателят може да променя стойността на параметъра (фигура 6) и учениците да наблюдават изменението на функцията при съответните му стойности.



Фигура 6.

За активизиране познавателната дейност, повишаване на мотивацията към изучаване и решаване на задачи с параметри е целесъобразно да се използват иновационни технологии и нестандартни методи на обучение, повлияващи да се реши един от основните проблеми на учениците – неразбирането на това как параметърът влияе на решението и на самата функция. В този случай нагледността от изменението на графиката на функцията в зависимост от параметъра е способна да обезпечи ефективното търсене на решение на задачата.

От чертежа се вижда, че две решения се получават в екстремумите на функцията  $f(x) = x^3 - 12x$ . Затова учениците трябва да намерят тези екстремуми, като изследват функцията чрез традиционния аналитичния метод. Проверяват се решенията им чрез демонстрирания компютърен метод.

При отделните етапи от демонстрацията могат да се използват различни цветове, оставяне на следа и други ефекти, с които се постига по-пълно и точно онагледяване при демонстриране на търсените елементи. Цветовото онагледяване цели да се насочи вниманието на учениците точно към тези елементи.

Учениците могат да провеждат експерименти и изследователска дейност, свързана с разработването на проекти, както и да работят в екип при решаване на поставените задачи. Разбира се добри резултати могат да се постигнат както и след умело задавани въпроси от преподавателя, така също и след добре анимирани демонстрации.

### Заклучение

Използването на ИКТ подпомага ефективно и двете страни на обучението, т.е. самото учене и възприемане от учениците, от една страна, и работата на преподавателя, от друга. Чрез ефектите на анимация се дава възможност на учениците да усвоят по-ефективно учебния материал, свързан с елементи от Математическия анализ, както и методите за решаване на задачи, свързани с тях.

Използването на динамичен интерактивен софтуер в преподаването по математика предоставя практически неограничени възможности за изучаване на геометрични образи в динамика, но в никакъв случай не омаловажава ролята на творческото мислене в търсене на решения на една или друга задача, грамотното владеене от учениците на математическите понятия и методи. Имайки предвид развитието на конкретно-образното мислене на учениците, ИКТ са незаменима опора в преподаването на много математически елементи, тъй като доближават абстрактната природа на математическата наука до съзнанието на всеки ученик.

### Литература

**Алексиева, Л., З. Лалчев и М. Върбанова**, Обучаваща компютърна презентация на тема „Аритметични преобразования“ за студенти педагози, *VI есенна научна конференция*, СУ „Кл. Охридски“, София, 2008, изд. „ВЕДА СЛОВЕНА – ЖГ“.

**Бизова-Лалева, В.**, *Приложение на информационните технологии за повишаване на ефективността на обучението по математика*, Дисертационен труд, Пловдив, 2016, стр. 14.

**Димкова, Д.**, *Учи и преподавай математика с GeoGebra*, София: Везни-4, 2012.

**CALGEO** „Преподаване на Математически анализ чрез средствата на Динамичната геометрия“, Atina, 2007, стр. 9.

**Лозанов, Ч.** и колектив, *Математика за 12 клас профилирана подготовка*, Анубис, 2002, стр. 43.

**Старибратов, И.**, *Методика на електронното обучение по математика*, Автореферат, ПУ „П. Хилендарски“, стр. 14.

**Уикипедия**, Официален сайт <https://bg.wikipedia.org/wiki>

**GeoGebra**, Официален сайт, <http://www.geogebra.org/> (дата на последно влизане: 19.9.2017 г.).

Математическа гимназия „Акад. Кирил Попов“ – Пловдив,  
e-mail: [n\\_bachvarova@mail.bg](mailto:n_bachvarova@mail.bg)

**THE USE OF INTERACTIVE COMPUTER TECHNOLOGIES  
AT THE ELEMENTS OF MATHS ANALYSIS  
IN SCHOLAR SUBJECT OF MATHS**

**Nikolinka Bachvarova**

***Summary:** This article refers to necessity of interactive computer technology's use in study of maths analysis elements. It proves the advisability to implement a dynamic computer graphics, which increase visibility in teaching the subject and solving a problems related to Maths. It proves the use of interactive geometric environment GeoGebra as a model demonstration and as self-control in Maths teaching. The practical addendum of this article can be useful for maths students who are educating themselves alone and for maths teachers too, who are studying the elements of Maths analysis and "Parametric equations". To illustrate the ideas, I have used a real examples from the teaching experience.*

***Key words:** information computer technologies, dynamic geomethric environment, animation, derivative.*