Върху геометрията на гладки многообразия с допълнителна тензорна структура

доц. д-р Марта Теофилова

Семинар на ФМИ
25–27.11.2014 г., гр. Хисар

Тематична класификация на научните публикации

Изследванията и получените резултати в представените научни публикации за участие в конкурса принадлежат към следните три тематични направления на диференциалната геометрия на гладки многообразия, снабдени с допълнителни тензорни структури:

- Почти комплексни многообразия с норденова метрика (B-метрика);
- Почти контактни многообразия с норденова метрика (B-метрика);
- Многообразия, снабдени със структура на произведение, разгледани като пространства от композиции.

Почти комплексни многообразия с норденова метрика

- Въведени са от руския геометър А. Норден. В България са изучавани първоначално от К. Грибачев, Д. Мекеров и Г. Джелепов, които ги наричат *обобщени B-многообразия*;
- Гладки четномерни многообразия (M, J, g), снабдени с почти комплексна структура J и метрика g с неутрална сигнатура такива, че
$$Jx^2 = -x, \qquad g(Jx, Jy) = -g(x, y);$$
- За разлика от почти ермитовите многообразия $\widetilde{g}(x, y) = g(x, Jy)$ е метрика (присъединена метрика);
- Класификация на тези многообразия относно свойствата на ковариантната производна на почти комплексната структура $F(x, y, z) = g((\nabla_x J)y, z)$ е получена от Г. Ганчев и А. Борисов. Тази класификация се състои от три основни класа, чието сечение е класът на келеровите многообразия с норденова метрика $(\nabla J = 0)$.

Почти комплексни многообразия с норденова метрика

- Въведени са от руския геометър А. Норден. В България са изучавани първоначално от К. Грибачев, Д. Мекеров и Г. Джелепов, които ги наричат *обобщени B-многообразия*;
- Гладки четномерни многообразия (M, J, g), снабдени с почти комплексна структура J и метрика g с неутрална сигнатура такива, че

$$Jx^2 = -x, \qquad g(Jx, Jy) = -g(x, y);$$

- За разлика от почти ермитовите многообразия $\widetilde{g}(x, y) = g(x, Jy)$ е метрика (присъединена метрика);
- Класификация на тези многообразия относно свойствата на ковариантната производна на почти комплексната структура $F(x, y, z) = g((\nabla_x J)y, z)$ е получена от Г. Ганчев и А. Борисов. Тази класификация се състои от три основни класа, чието сечение е класът на келеровите многообразия с норденова метрика ($\nabla J = 0$).

Почти комплексни многообразия с норденова метрика

- Въведени са от руския геометър А. Норден. В България са изучавани първоначално от К. Грибачев, Д. Мекеров и Г. Джелепов, които ги наричат *обобщени B-многообразия*;
- Гладки четномерни многообразия (M, J, g), снабдени с почти комплексна структура J и метрика g с неутрална сигнатура такива, че

$$Jx^2 = -x, \qquad g(Jx, Jy) = -g(x, y);$$

- За разлика от почти ермитовите многообразия $\widetilde{g}(x, y) = g(x, Jy)$ е метрика (присъединена метрика);
- Класификация на тези многообразия относно свойствата на ковариантната производна на почти комплексната структура $F(x, y, z) = g((\nabla_x J)y, z)$ е получена от Г. Ганчев и А. Борисов. Тази класификация се състои от три основни класа, чието сечение е класът на келеровите многообразия с норденова метрика ($\nabla J = 0$).

Почти комплексни многообразия с норденова метрика

- Въведени са от руския геометър А. Норден. В България са изучавани първоначално от К. Грибачев, Д. Мекеров и Г. Джелепов, които ги наричат *обобщени В-многообразия*;
- Гладки четномерни многообразия (M, J, g), снабдени с почти комплексна структура J и метрика g с неутрална сигнатура такива, че

$$Jx^2 = -x, \qquad g(Jx, Jy) = -g(x, y);$$

- За разлика от почти ермитовите многообразия $\widetilde{g}(x, y) = g(x, Jy)$ е метрика (присъединена метрика);
- Класификация на тези многообразия относно свойствата на ковариантната производна на почти комплексната структура $F(x, y, z) = g((\nabla_x J)y, z)$ е получена от Г. Ганчев и А. Борисов. Тази класификация се състои от три основни класа, чието сечение е класът на келеровите многообразия с норденова метрика ($\nabla J = 0$).

Почти комплексни многообразия с норденова метрика

Върху почти комплексни многообразия с норденова метрика са изучавани:

- линейни свързаности и трансформации на линейни свързаности;
- кривинни свойства;
- примери чрез групи на Ли.

Почти комплексни многообразия с норденова метрика

Върху почти комплексни многообразия с норденова метрика са изучавани:

- линейни свързаности и трансформации на линейни свързаности;
- кривинни свойства;
- примери чрез групи на Ли.

Почти комплексни многообразия с норденова метрика

Върху почти комплексни многообразия с норденова метрика са изучавани:

- линейни свързаности и трансформации на линейни свързаности;
- кривинни свойства;
- примери чрез групи на Ли.

Линейни свързаности

M. Teofilova, Complex connections on conformal Kaehler manifolds with Norden metric, Proc. of The 10th International Workshop on Complex Structures, Integrability and Vector Fields, AIP Conf. Proc. 1340, New York, 2011, 97—108; ISBN 978–0–7354–0895–1.

Конструиране и изследване на семейства от линейни свързаности върху комплексни многообразия с норденова метрика, принадлежащи на основния клас $\mathcal{W}_1$ от класификацията на Ганчев-Борисов.

Този клас се определя от следното характеристично условие

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2n}\left\{g(x,y)\theta(z) + g(x,Jy)\theta(Jz) + g(x,z)\theta(y) + g(x,Jz)\theta(Jy)\right\},$$

където

$$\theta(x) = g^{ij}F(e_i,e_j,x) = g(\Omega,x).$$

- Конструирано е 8-параметрично семейство от линейни свързаности ∇', запазващи комплексната структура при ковариантно диференциране (комплексни свързаности), т.е. свързаности, за които $\nabla' J = 0$:

$$\nabla'_x y = \nabla_x y + Q(x, y),$$

където тензорът на деформацията $Q(x, y)$ се определя чрез

$$\begin{aligned} Q(x,y) = &\frac{1}{2n}\left[\theta(Jy)x - g(x,y)J\Omega\right] \\ &+ \frac{1}{n}\{\lambda_1\theta(x)y + \lambda_2\theta(x)Jy + \lambda_3\theta(Jx)y + \lambda_4\theta(Jx)Jy \\ &+ \lambda_5\left[\theta(y)x - \theta(Jy)Jx\right] + \lambda_6\left[\theta(y)Jx + \theta(Jy)x\right] \\ &+ \lambda_7\left[g(x,y)\Omega - g(x,Jy)J\Omega\right] + \lambda_8\left[g(x,Jy)\Omega + g(x,y)J\Omega\right]\}, \end{aligned}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., 8$.

- Изучавани са свойствата на тензорите на торзията на ∇' и така е отделено 4-параметрично семейство от симетрични комплексни свързаности ∇''. Показано е, че известната свързаност на Яно принадлежи на това семейство.

- От свързаностите ∇' е отделено 2-параметрично семейство от естествени свързаности ∇''', т.е. такива, които запазват J и g при ковариантно диференциране.

Вид свързаност	Означение	Параметри
Комплексна	∇'	$\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., 8.$
Комплексна симетрична	∇''	$\mu_i,\ i = 1, 2, 3, 4,$ $\mu_1 = \lambda_1 = -\lambda_4 = \lambda_5,$ $\mu_2 = \lambda_2 = \lambda_6 = \lambda_3 - \frac{1}{2},$ $\mu_3 = \lambda_7,\ \mu_4 = \lambda_8$
Естествена	∇'''	$s, t,$ $s = \lambda_8 = -\lambda_6,\ t = \lambda_7 = -\lambda_5,$ $\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

В дисертационния труд е разгледана една естествена свързаност (полусиметрична метрична свързаност) ∇^0, определена от

$$\nabla^0_x y = \nabla_x y + \frac{1}{2n}\left[\theta(Jy)x - g(x,y)J\Omega\right]. \tag{1}$$

Тази свързаност се получава при $t = s = 0$.

Получен е видът на келеровия тензор на кривина R^0 за тази свързаност върху многообразия от класа $\mathcal{W}_1$ със затворена едноформа $\theta \circ J$:

$$R^0 = R - \frac{1}{2n}\psi_1(P),$$

където

$$P(x,y) = (\nabla_x \theta)\, Jy + \frac{1}{2n}\theta(x)\theta(y) + \frac{\theta(\Omega)}{4n}g(x,y) + \frac{\theta(J\Omega)}{2n}g(x,Jy).$$

- Върху конформно келерово многообразие са намерени необходими и достатъчни условия за тензора $R'(x,y,z,u) = g(R'(x,y)z,u)$ за ∇' да бъде келеров тензор на кривина от тип (0,4), а именно $\lambda_7 = -\lambda_5$, $\lambda_8 = -\lambda_6$.

$$
\begin{aligned}
R' = R^0 &+ \tfrac{\lambda_7}{n}\left\{\psi_1 - \psi_2\right\}(S_1) + \tfrac{\lambda_8}{n}\left\{\psi_1 - \psi_2\right\}(S_2) \\
&+ \tfrac{\lambda_7(4\lambda_8-1)}{2n^2}\left\{\psi_1 - \psi_2\right\}(S_3) + \tfrac{\lambda_7(1-2\lambda_8)\theta(J\Omega)}{n^2}\left\{\pi_1 - \pi_2\right\} \\
&+ \tfrac{2\lambda_7\lambda_8\theta(\Omega)}{n^2}\pi_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_1(x,y) &= \left(\nabla_x\theta\right)y + \tfrac{\lambda_7}{n}[\theta(x)\theta(y) - \theta(Jx)\theta(Jy)] - \tfrac{\lambda_7\theta(\Omega)}{2n}g(x,y) \\
&\quad + \tfrac{\lambda_7\theta(J\Omega)}{2n}g(x,Jy), \\
S_2(x,y) &= \left(\nabla_x\theta\right)Jy + \tfrac{1-2\lambda_8}{2n}[\theta(x)\theta(y) - \theta(Jx)\theta(Jy)] \\
&\quad + \tfrac{\lambda_8\theta(\Omega)}{2n}g(x,y) + \tfrac{(1-\lambda_8)\theta(J\Omega)}{2n}g(x,Jy), \\
S_3(x,y) &= \theta(x)\theta(Jy) + \theta(Jx)\theta(y).
\end{aligned}
$$

Тензорът на Вайл, инвариантен при конформна трансформация от първи тип (обикновена конформна трансформация) $\bar{g} = e^{2u}g$, се определя от

$$W(R) = R - \frac{1}{2(n-1)}\{\psi_1(\rho) - \frac{\tau}{2n-1}\pi_1\}.$$

Теорема

Върху конформно келерово многообразие с норденова метрика тензорът на Вайл е инвариантен при трансформация на свързаността на Леви-Чивита във всяка от комплексните свързаности ∇' за $\lambda_i = 0$, $i = 5, 6, 7, 8$.

Тензорът на Бохнер, инвариантен при конформна трансформация от втори тип (холоморфна конформна трансформация) $\bar{g} = e^{2u}(\cos 2v g + \sin 2v \tilde{g})$, се определя от:

$$B(L) = L - \frac{1}{2(n-2)}\{\psi_1 - \psi_2\}\big(\rho(L)\big) + \frac{1}{4(n-1)(n-2)}\{\tau(L)\big(\pi_1 - \pi_2\big) + \tau^*(L)\pi_3\}.$$

Теорема

Върху конформно келерово многообразие с норденова метрика тензорът на Бохнер е инвариантен при трансформация на свързаността ∇^0 във всяка от комплексните свързаности ∇', за които $\lambda_7 = -\lambda_5$, $\lambda_8 = -\lambda_6$.

Конформни трансформации на комплексни свързаности

Теорема

Върху конформно келерово многообразие с норденова метрика тензорът на кривина за комплексните свързаности ∇' *с условието* $\lambda_i = 0$, $i = 5, 6, 7, 8$, *е инвариантен при обикновена конформна трансформация.*

Теорема

Върху конформно келерово многообразие с норденова метрика тензорът на Бохнер за тензора на кривина за комплексните свързаности ∇' *с условията* $\lambda_7 = -\lambda_5$ *и* $\lambda_8 = -\lambda_6$ *е инвариантен при обикновена конформна трансформация, т.е.* $B(\overline{R}') = e^{2u}B(R')$.

M. Teofilova, Lie groups as four-dimensional special complex manifolds with Norden metric, Math. Educ. Math., Proc. of 39th Spring Conference of UBM, Albena, 06–11.04.2010, 154—159; ISSN 1313—3330.

Характеристични условия на класовете $\mathcal{W}_2$ и $\mathcal{W}_3$:

$$\mathcal{W}_2 : F(x,y,Jz)+F(y,z,Jx)+F(z,x,Jy) = 0, \quad \theta = 0 \ \Leftrightarrow \ N = 0, \quad \theta = 0;$$

$$\mathcal{W}_3 : F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y) = 0.$$

Секционна кривина на двумерна допирателна площадка $\alpha = \{x,y\}$ в произволна точка p на допирателното пространство T_pM

$$k(\alpha;p) = \frac{R(x,y,y,x)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2}.$$

Квадратична норма на ∇J

$$||\nabla J||^2 = g^{ij}g^{kl}g\left((\nabla_{e_i}J)e_k, (\nabla_{e_j}J)e_l\right).$$

Кривинни свойства на $\mathcal{W}_2$-многообразия

Теорема

Нека (M, J, g) е почти комплексно многообразие с норденова метрика и точково постоянна холоморфна секционна кривина $H(p)$, $p \in M$. Тогава:

- $||\nabla J||^2 = 8n^2 H(p)$, *ако* $(M, J, g) \in \mathcal{W}_2$;
- $||\nabla J||^2 = -8n^2 H(p)$, *ако* $(M, J, g) \in \mathcal{W}_3$.

Следствие

Нека (M, J, g) е с точково постоянна холоморфна секционна кривина и принадлежи на класа $\mathcal{W}_2$ или $\mathcal{W}_3$. Тогава многообразието е изотропно келерово (т.е. $||\nabla J||^2 = 0$) точно когато $H(p) = 0$.

Конструиране на пример на $\mathcal{W}_2$-многообразие

Разглеждаме реална 4-мерна $\mathfrak{g}$ алгебра на Ли, съответна на реална група на Ли G. Нека $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ е база от лявоинвариантни векторни полета от G и $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$ са структурните константи на алгебрата, които удовлетворяват условието $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ и тъждеството на Якоби $C_{ij}^k C_{ks}^l + C_{js}^k C_{ki}^l + C_{si}^k C_{kj}^l = 0$.

Определяме лявоинвариантна почти комплексна структура J и съвместима с нея норденова метрика g, както следва:

$$Je_1 = e_3, \quad Je_2 = e_4, \quad Je_3 = -e_1, \quad Je_4 = -e_2,$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = -g(e_4, e_4) = 1,$$
$$g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Тогава (G, J, g) е 4-мерно почти комплексно многообразие с норденова метрика.

Конструиране на пример на $\mathcal{W}_2$-многообразие

Теорема

Четиримерното почти комплексно многообразие с норденова метрика (G, J, g) *принадлежи на класа* $\mathcal{W}_2$, *точно когато структурните константи удовлетворяват тъждеството на Якоби и следните условия:*

$$\begin{aligned}
C_{13}^1 &= C_{12}^4 - C_{23}^2 = C_{34}^4 - C_{14}^2, \\
C_{24}^4 &= C_{12}^1 - C_{14}^3 = C_{34}^1 - C_{23}^3, \\
C_{13}^3 &= -\left(C_{12}^2 + C_{23}^4\right) = -\left(C_{14}^4 + C_{34}^2\right), \\
C_{24}^2 &= -\left(C_{12}^3 + C_{14}^1\right) = -\left(C_{23}^1 + C_{34}^3\right).
\end{aligned}$$

Пример

$$\mathfrak{g}: \begin{array}{lll} [e_1, e_2] = \lambda e_1 - \lambda e_2, & [e_2, e_3] = \mu e_1 + \lambda e_4, & \\ [e_1, e_3] = \mu e_2 + \lambda e_4, & [e_2, e_4] = \mu e_1 + \lambda e_3, & \\ [e_1, e_4] = \mu e_2 + \lambda e_3, & [e_3, e_4] = -\mu e_3 + \mu e_4, & \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Теорема

Върху изучаваното многообразие са еквивалетни условията:

- (G, J, g) *е изотропно келерово;*
- $|\lambda| = |\mu|$*;*
- $\tau = 0$*;*
- (G, J, g) *притежава нулеви холоморфни секционни кривини;*
- *тензорът на Вайл е нулев.*
- $R = \frac{1}{2}\psi_1(\rho)$.

M. Teofilova, Lie groups as Kaehler manifolds with Killing Norden metric, C.R. Acad. Bulg. Sci., 65(6) (2012), 733—742; ISSN 1310—1331.

Лявоинвариантната почти комплексна структура J върху група на Ли е биинвариантна, ако $[x, Jy] = J[x, y], x, y \in \mathfrak{g}$, т.е. $\mathrm{ad}x(Jy) = J\mathrm{ad}x(y)$, където $adx(y) = [x, y]$.

Метриката е ad-инвариантна (килингова), ако $g([x, y], z) = -g([x, z], y)$.

Формата на Килинг се определя от $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y)$.

Определяме структурите върху $2n$-мерна група на Ли чрез:

$$Je_i = e_{i+n}, \qquad Je_{i+n} = -e_i,$$
$$g(e_i, e_i) = -g(e_{i+n}, e_{i+n}) = 1,$$
$$g(e_j, e_k) = 0, \quad j \neq k, \quad i = 1, 2, ..., n; \ j, k = 1, 2, ..., 2n.$$

Теорема

Нека G е реална група на Ли, снабдена с почти комплексна структура J и двойка норденова метрики g и $\widetilde{g}$. Тогава, от всеки две от следните условия следва третото:

- *J е биинвариантна;*
- *g е килингова;*
- *$\widetilde{g}$ е килингова.*

Теорема

Върху полупроста алгебри на Ли, снабдена с биинвариантна комплексна структура, формата на Килинг има свойствата на норденова метрика, т.е. $B(Jx, Jy) = -B(x, y)$.

Теорема

Нека (G, J, g) е 6-мерно почти комплексно многообразие с норденова метрика. Тогава (G, J, g) е келерово многообразие, снабдена с биинвариантна комплексна структура, точно когато алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$ на G е от вида:

$$
\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= -[e_4, e_5] = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6, \\
[e_1, e_5] &= -[e_2, e_4] = -\lambda_4 e_1 - \lambda_5 e_2 - \lambda_6 e_3 + \lambda_1 e_4 + \lambda_2 e_5 + \lambda_3 e_6, \\
[e_1, e_3] &= -[e_4, e_6] = \lambda_7 e_1 + \lambda_8 e_2 - \lambda_2 e_3 + \lambda_9 e_4 + \lambda_{10} e_5 - \lambda_5 e_6, \\
[e_1, e_6] &= -[e_3, e_4] = -\lambda_9 e_1 - \lambda_{10} e_2 + \lambda_5 e_3 + \lambda_7 e_4 + \lambda_8 e_5 - \lambda_2 e_6, \\
[e_2, e_3] &= -[e_5, e_6] = \lambda_{11} e_1 - \lambda_7 e_2 + \lambda_1 e_3 + \lambda_{12} e_4 - \lambda_9 e_5 + \lambda_4 e_6 \\
[e_2, e_6] &= -[e_3, e_5] = -\lambda_{12} e_1 + \lambda_9 e_2 - \lambda_4 e_3 + \lambda_{11} e_4 - \lambda_7 e_5 + \lambda_1 e_6,
\end{aligned}
$$

където $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., 12$.

Теорема

Метриките g *и* $\widetilde{g}$ *са килингови върху* (G, J, g), *точно когато*

$$[e_1, e_2] = -[e_4, e_5] = \lambda e_3 + \mu e_6,$$

$$[e_1, e_5] = -[e_2, e_4] = -\mu e_3 + \lambda e_6,$$

$$[e_1, e_3] = -[e_4, e_6] = -\lambda e_2 - \mu e_5,$$

$$[e_1, e_6] = -[e_3, e_4] = \mu e_2 - \lambda e_5,$$

$$[e_2, e_3] = -[e_5, e_6] = \lambda e_1 + \mu e_4,$$

$$[e_2, e_6] = -[e_3, e_5] = -\mu e_1 + \lambda e_4.$$

Формата на Килинг се определя от

$$B = 4\begin{pmatrix} \mu^2-\lambda^2 & 0 & 0 & 2\lambda\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2-\lambda^2 & 0 & 0 & 2\lambda\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2-\lambda^2 & 0 & 0 & 2\lambda\mu \\ 2\lambda\mu & 0 & 0 & \lambda^2-\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda\mu & 0 & 0 & \lambda^2-\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda\mu & 0 & 0 & \lambda^2-\mu^2 \end{pmatrix}.$$

Нейната детерминанта $\det B = -4096(\lambda^2+\mu^2)^6 < 0$, следователно алгебрата е компактна.

Многообразието е с точково постоянни напълно реални секционни кривини и следователно тензорът му на кривина се определя от $R = \nu\{\pi_1 - \pi_2\} + \nu^*\pi_3$.

Почти контактни многообразия с норденова метрика

- Началото на изучаването на почти контактните многообразия с *B*-метрика е поставено от Г. Ганчев, В. Михова и К. Грибачев през 1993 г.;
- По-нататък към изучаването им се присъединяват и други български геометри: М. Манев, Г. Накова и др.
- $2n+1$-мерни гладки многообразия, снабдени с почти контактна структура (φ, ξ, η) и норденова (*B*-метрика)

$$\varphi^2 x = -x + \eta(x)\xi, \qquad \eta(\xi) = 1, \qquad g(\varphi x, \varphi y) = -g(x,y) + \eta(x)\eta(y).$$

- изучаване на свойствата на тензора на кривина за свързаността на Леви-Чивита и получаване на зависимости между скаларни инварианти върху такива многообразия;
- конструиране на примери чрез групи на Ли.

Почти контактни многообразия с норденова метрика

- Началото на изучаването на почти контактните многообразия с B-метрика е поставено от Г. Ганчев, В. Михова и К. Грибачев през 1993 г.;
- По-нататък към изучаването им се присъединяват и други български геометри: М. Манев, Г. Накова и др.
- $2n+1$-мерни гладки многообразия, снабдени с почти контактна структура (φ, ξ, η) и норденова (B-метрика)

$$\varphi^2 x = -x + \eta(x)\xi, \qquad \eta(\xi) = 1, \qquad g(\varphi x, \varphi y) = -g(x, y) + \eta(x)\eta(y).$$

- изучаване на свойствата на тензора на кривина за свързаността на Леви-Чивита и получаване на зависимости между скаларни инварианти върху такива многообразия;
- конструиране на примери чрез групи на Ли.

Почти контактни многообразия с норденова метрика

- Началото на изучаването на почти контактните многообразия с *B*-метрика е поставено от Г. Ганчев, В. Михова и К. Грибачев през 1993 г.;
- По-нататък към изучаването им се присъединяват и други български геометри: М. Манев, Г. Накова и др.
- $2n+1$-мерни гладки многообразия, снабдени с почти контактна структура (φ, ξ, η) и норденова (*B*-метрика)

$$\varphi^2 x = -x + \eta(x)\xi, \qquad \eta(\xi) = 1, \qquad g(\varphi x, \varphi y) = -g(x,y) + \eta(x)\eta(y).$$

- изучаване на свойствата на тензора на кривина за свързаността на Леви-Чивита и получаване на зависимости между скаларни инварианти върху такива многообразия;
- конструиране на примери чрез групи на Ли.

Почти контактни многообразия с норденова метрика

- Началото на изучаването на почти контактните многообразия с *B*-метрика е поставено от Г. Ганчев, В. Михова и К. Грибачев през 1993 г.;
- По-нататък към изучаването им се присъединяват и други български геометри: М. Манев, Г. Накова и др.
- $2n+1$-мерни гладки многообразия, снабдени с почти контактна структура (φ, ξ, η) и норденова (*B*-метрика)

$$\varphi^2 x = -x + \eta(x)\xi, \qquad \eta(\xi) = 1, \qquad g(\varphi x, \varphi y) = -g(x,y) + \eta(x)\eta(y).$$

- изучаване на свойствата на тензора на кривина за свързаността на Леви-Чивита и получаване на зависимости между скаларни инварианти върху такива многообразия;
- конструиране на примери чрез групи на Ли.

Почти контактни многообразия с норденова метрика

- Началото на изучаването на почти контактните многообразия с *B*-метрика е поставено от Г. Ганчев, В. Михова и К. Грибачев през 1993 г.;
- По-нататък към изучаването им се присъединяват и други български геометри: М. Манев, Г. Накова и др.
- $2n+1$-мерни гладки многообразия, снабдени с почти контактна структура (φ, ξ, η) и норденова (*B*-метрика)

$$\varphi^2 x = -x + \eta(x)\xi, \qquad \eta(\xi) = 1, \qquad g(\varphi x, \varphi y) = -g(x, y) + \eta(x)\eta(y).$$

- изучаване на свойствата на тензора на кривина за свързаността на Леви-Чивита и получаване на зависимости между скаларни инварианти върху такива многообразия;
- конструиране на примери чрез групи на Ли.

M. Manev, M. Teofilova, On the curvature properties of real time-like hypersurfaces of Kaehler manifolds with Norden metric, In: Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, Proc. of the 9th International Workshop on Complex Structures, Integrability and Vector Fields, eds. K. Sekigawa, V. Gerdjikov, S. Dimiev, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009, 174—184; ISBN13 978–981–4277–71–6.

- кривинни свойства на почти контактни многообразия с норденова метрика, конструирани като реални времеподобни хиперповърхнини с коразмерност едно на келерови многообразия с норденова метрика;
- получен е видът на тензора на кривина върху произволна реална времеподобна хиперповърхнина на келерово многообразие с постоянни напълно реални секционни кривини;
- намерен видът на тензора на кривина за каноничната свързаност върху разглеждания тип хиперповърхнини;
- разгледан е случаят, когато хиперповърхнината принадлежи на най-широкия възможен за този случай клас нормални почти контактни многообразия с норденова метрика.

M. Teofilova, On a class almost contact manifolds with Norden metric, In: Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications – REMIA 2010, Proc. Anniv. Intern. Conf. 10–12.12.2010, Plovdiv, Bulgaria, 2010, 217—223; ISBN 978–954–423–648–9.

- кривинни свойства на почти контактни многообразия с норденова метрика, принадлежащи на един от единадесетте основни класа от класификацията на Г. Ганчев, В. Михова, К. Грибачев, а именно класа $\mathcal{F}_{11}$;
- зависимости между някои основни скаларни инварианти върху многообразия от този клас;
- свойства на тензора на кривина и въз основа на тях е намерено необходимо и достатъчно условие за този тензор да бъде от келеров тип;
- пример на $(2n+1)$-мерно $\mathcal{F}_{11}$-многообразие върху група на Ли.

M. Teofilova, Curvature properties of normal almost contact manifolds with B-metric, J. Geom. 104(3) (2013), 571-–584; ISSN 0047–2468; MCQ(2011): 0.22.

- свойства на тензора на кривина и зависимости между скаларни инварианти върху най-широкия клас нормални почти контактни многообразия;
- същото е направено и за главните класове нормални почти контактни многообразия;
- конструиран е пример на многообразие от класа $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$ със затворени 1-форми на Ли.

M. Ajeti, M. Teofilova, G. Zlatanov, Triads of compositions in an even-dimensional space with a symmetric affine connection, Tensor, Edited by Tomoaki Kawaguchi, Tensor Society, Chigasaki, Japan, N.S. 73(3) (2011), 171–187; ISSN 0040–3504.

- четномерни пространства със симетрична свързаност, в които се разглежда композиция на две подмногообразия, наречени базови. Въвеждането на такава композиция е равносилно на дефинирането на интегруема структура на почти произведение;
- представена е конструкция, която позволява изучаването на тройка композиции с едно общо базово многообразие;
- зависимост от условията за паралелен и квазипаралелен пренос са класифицирани 72 вида специални тройки композиции, като са получени техните инвариантни характеристики и характеристиките на пространствата, които ги съдържат.

M. Ajeti, M. Teofilova, G. Zlatanov, Triads of compositions in an even-dimensional space with a symmetric affine connection, Tensor, Edited by Tomoaki Kawaguchi, Tensor Society, Chigasaki, Japan, N.S. 73(3) (2011), 171–187; ISSN 0040–3504.

- четномерни пространства със симетрична свързаност, в които се разглежда композиция на две подмногообразия, наречени базови. Въвеждането на такава композиция е равносилно на дефинирането на интегруема структура на почти произведение;
- представена е конструкция, която позволява изучаването на тройка композиции с едно общо базово многообразие;
- зависимост от условията за паралелен и квазипаралелен пренос са класифицирани 72 вида специални тройки композиции, като са получени техните инвариантни характеристики и характеристиките на пространствата, които ги съдържат.

M. Ajeti, M. Teofilova, G. Zlatanov, Triads of compositions in an even-dimensional space with a symmetric affine connection, Tensor, Edited by Tomoaki Kawaguchi, Tensor Society, Chigasaki, Japan, N.S. 73(3) (2011), 171–187; ISSN 0040–3504.

- четномерни пространства със симетрична свързаност, в които се разглежда композиция на две подмногообразия, наречени базови. Въвеждането на такава композиция е равносилно на дефинирането на интегруема структура на почти произведение;
- представена е конструкция, която позволява изучаването на тройка композиции с едно общо базово многообразие;
- зависимост от условията за паралелен и квазипаралелен пренос са класифицирани 72 вида специални тройки композиции, като са получени техните инвариантни характеристики и характеристиките на пространствата, които ги съдържат.

Musa Ajeti, Georgi Kostadinov, Marta Teofilova, Transformations on spaces with special compositions, Advances in Mathematics: Scientific Journal 2(2) (2013), 49–54; ISSN 1857–8365.

M. Teofilova, G. Zlatanov, Transformations of affine connections on spaces of quasi-chebishevian compositions, C.R. Acad. Bulg. Sci. 66(11) (2013), 1515–1520; ISSN 1310–1331; IF(2012): 0.211.

- трансформации на симетрична свързаност в свързаности с торзия върху пространства със специални композиции – геодезични, чебишеви и квазичебишеви;
- получени са необходими и достатъчни условия за тензора на деформацията, така че относно несиметричните свързаности композицията да удовлетворява условие, аналогично на условието относно симетричната свързаност;

Musa Ajeti, Georgi Kostadinov, Marta Teofilova, Transformations on spaces with special compositions, Advances in Mathematics: Scientific Journal 2(2) (2013), 49–54; ISSN 1857–8365.

M. Teofilova, G. Zlatanov, Transformations of affine connections on spaces of quasi-chebishevian compositions, C.R. Acad. Bulg. Sci. 66(11) (2013), 1515–1520; ISSN 1310–1331; IF(2012): 0.211.

- трансформации на симетрична свързаност в свързаности с торзия върху пространства със специални композиции – геодезични, чебишеви и квазичебишеви;
- получени са необходими и достатъчни условия за тензора на деформацията, така че относно несиметричните свързаности композицията да удовлетворява условие, аналогично на условието относно симетричната свързаност;

Благодаря Ви за вниманието!