

ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 ГОДИНИ ФМИ  
ПУ “ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”, ПЛОВДИВ, 3-4.11.2000

## АНАЛИЗ НА ДЕЙНОСТТА РЕШАВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ

Петър Д. Петров

В статията е анализирана дейността решаване на математически задачи, като са използвани модели, описани в термините на няколко качествено различни езици. Обособени са психолого-дидактически и логико-математически акценти на анализа. Изведени са характеристики на процеса на решаване на математически задачи, които отчитат: реализирането на ориентировъчната роля и управлението; алгоритмичните и евристичните компоненти; спецификата на математическите знания и тяхната логическа основа; връзката с дейността съставяне на математически задачи.

Решаването на задачи е приоритетна дейност в обучението по математика. Тя е една от най-често срещаните видове мисловна дейност. Неслучайно, в тесен смисъл, някои учени разглеждат интелекта като способност да се решават задачи. Процесът на решаване на задачи се явява предмет на изучаване на много науки: философия, психология, кибернетика, логика, педагогика, частни методики и др.

Когато съдържанието и характеристиките на дадена дейност получат подходяща обективизация в речева форма, те се запазват и предават пълноценно на следващите поколения. Затова всяко поколение се стреми да я опознае по-пълно, като изследва материалните и идеалните обекти свързани с нея, а също така и дейностите на хората, които я владеят.

В редица наши публикации ние изследвахме някои характеристики на дейността решаване на задачи (ДРМЗ), които най-общо са свързани с реализирането на мисленето като прогнозиране. Развитието на методиката на обучението по математика през последните 30 години и появата на някои нови публикации като [2], [4], дава възможност да се задълбочи изучаването на дейността решаване на математически задачи.

При анализа в разработката се използват елементи от общата теория на системите, тъй като една от целите и е разкриването системността на произволна целенасочена дейност. Моделирането дава възможност за обобщаване, предаване и усъвършенстване опита на разглежданата дейност. Съвместното описание в термините на няколко качествено различни езици позволява да се охарактеризира явлението в по-голяма яснота и да се реализират по-пълно описателно-обяснителните и прогностично-конструктивните функции на методическите знания.

В следващото изложение се използва традиционния понятиен апарат на теорията на задачите наложил се у нас. Когато употребяваме термина "решаване", разбираме дейността, при която от условието се получава търсеното. Тъй като тя има етапен характер е подходящо да се разглежда като процес на решаване.

В литературата по методика на обучението по математика най-често срещаният "макромодел" на процеса на решаване е приблизително следният:

1. Разбиране на задачата;
2. Възникване на идея и съставяне на план (търсене на решение);
3. Осъществяване на плана;
4. Допълнителна работа по задачата след решаването и.

Акцентът се поставя на втория етап като главен и най-сложен. Това разбиране за него го поставя в основата на нашия анализ, при което няма да разграничаваме рязко търсенето на решение от процеса на решаване.

### ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧЕСКИ АКЦЕНТИ

Известно е, че ако процеса на решаване на задачи се разглежда като умствено действие, всички операции трябва да се разчленят на три групи (ориентировъчни, изпълнителски контролно-коригиращи). Тогава в процеса на решаване на задачи се открояват три части:

- ориентировъчна (разбиране на задачата и търсене решение);
- изпълнителска (осъществяване плана на решаване);
- контролна (проверка и анализ на решението).

Тук водеща е ориентировъчната част от процеса на решаване.

В теорията на управлението контролът се разглежда като относително самостоятелно и завършващо звено в управленския цикъл. Органическата връзка на контрола с другите функции на управлението се проявява в това, че последните встъпват като основни елементи на контрола. От крайния резултат той се разпространява на все по-ранни фази на дейността, което може да бъде условие за ефективно търсене на решение.

От гледна точка на управлението на учебната дейност най-важен е етапът на изграждане ориентировъчната основа на действието. Управлението (по-точно може би ръководството) на този етап се изразява в изграждане на такава основа. На етапите на отработване на действието постепенно управлението на действието силно се ограничава.

До тук се открие ориентировъчната функция на етапа "търсене на решение" и възможността на него да се реализира управлението на процеса на решаване. Даде се идея, че разпространяването на контрола на този етап може да бъде условие за ефективно търсене на решение.

В литературните източници се разглеждат два принципно различни компонента на процеса на решаване: алгоритмичен и евристичен. Ако първият се осъществява в съответствие с известен алгоритъм, то вторият - в съответствие с приета стратегия на търсене решение. Обикновено се отделят следните особености на евристиките (похвати, методи, начини на търсене):

- осъществява се редукция към подцели ;
- ограничава се избора ;
- не водят до гарантиран успех ;
- използването им е високоефективно ;
- могат да се разглеждат като теория на поведението на човека при решаване на задачи [3, с. 30] .

Проблемът за механизмите, с помощта на които се търси решение на една задача е класически стар и вечно нов. Още древногръцкият математик Пап (300 г. пр. н. е.) се е занимавал с въпросите как се правят открития. Решавайки задачи, Рене Декарт (1596-1650) забелязва, че използва едни и същи правила. По-късно написва "Правила за ръководство на ума" За много изследователи естествен стремеж е да се намери

ефективна последователност от етапи, общи указания (евристики) за решаване на задачи. Евристиката е едно от най-важните направления в изучаване структурата на мисловната дейност. В него се правят опити да се разкрие природата на мисловните операции на човека при решаване на задачи. Разглеждат се типични похвати, методи и стратегии, при които отделните компоненти се структурират в тактики, насочени към търсене на необходимата информация и отработване на решение.

В практиката на обучението по математика у нас идеята за по-широко използване на евристичните схеми се налага главно под въздействието на книгите на Д. Пойя. На учениците се предлагат евристични правила подобни на тези, които са предложени във вид на обща схема на решение в края на книгата "Как да се решава задача" [5].

В критичен план може да се каже, че само чрез логически анализ, който е необходим и много полезен, трудно могат да се разкрият вътрешните механизми на евристичните процеси. Когато се опитваме да опишем процесите на мисленето в термините на традиционната логика резултатът често е незадоволителен. "Може да имаме верига от логически операции, всяка от които е напълно коректна сама по себе си, но взети заедно те не отразяват разумния ход на мисленето" [1, с. 37]. В този смисъл често предлаганите евристики са твърде общи и абстрактни.

Безспорно идеята за широко приложение на евристичните схеми в обучението по математика е перспективна. За ефективното им използване е необходимо да се изследват: причините за трудностите при формиране умения за решаване на нестандартни задачи; степента на вербализуемост на евристичните похвати, методи и на дейността решаване на задачи; условия за ефективно усвояване на алгоритмичните и евристичните компоненти в единство.

При детайлизиране на макромодела на процеса на решаване и отделяне на "елементарни стъпки", от които се състоят отделните му етапи, Л. М. Фридман обособява два типа елементарни стъпки:

- елементарни стъпки, реализацията на които е достоверен извод;
- елементарни стъпки, реализацията на които е правдоподобен извод.

По нататък се посочва, че евристичните компоненти на дейността решаване на задачи се състоят от елементарни стъпки носещи правдоподобен характер [7, с. 67-73]. Това означава, че отправна точка за усвояването на евристични похвати е оперирането с понятието правдоподобно твърдение.

В обучението по математика знанията се извеждат предимно чрез доказателствени разсъждения, а предположенията се подкрепят чрез "правдоподобни" разсъждения. Д. Пойя извежда великолепната теза, че математиката предлага прекрасна възможност да формираме умения за доказване на твърдения и едновременно с това "... в обикновената училищна програма няма друг предмет, който да е сравним с математиката по възможността за приучване към правдоподобни разсъждения [6, с. 6].

Дълбочината на тази теза според нас се състои в това, че работата с правдоподобни твърдения е в основата на евристичната и творческата дейност при решаване на задачи.

#### ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИ АКЦЕНТИ

Съдържанието на училищния курс по математика е дидактическа интерпретация на класическата математика, най-вече до 16 век. Основни обекти, които се изучават са: понятията, определенията, аксиомите, теоремите, доказателствата на теоремите, алгоритмите, задачите и решенията на задачите. Те са структурирани така, че да са изпълнени изискванията за наредба на понятията според техните определения и на

теоремите според възможностите за доказването им, което е един от основните логически проблеми.

Голяма част от посочените обекти са съждения, съждителни форми или са обекти свързани с тези логически понятия. Това дава основание на Ив. Ганчев да използва методите за усвояване на понятия, съждения и съждителни форми, свързани с различни математически обекти, като основни градивни елементи в методиката на обучението по математика [2, с. 78].

Като се аргументира, че съждение от вида "Ако..., то" е една импликация, той разглежда всяка задача като импликация  $p \rightarrow q$ , а изискването да се реши задачата като изискване да се докаже верността на тази импликация [2, с. 90]. Съществена част от дейността на човек, който решава успешно задачата  $p \rightarrow q$  е откриването на междинните импликации и тяхното подреждане в линейна или нелинейна последователност.

В монографията са обособени три равнища, на които се провеждат разсъжденията при решаване на задачи: атомарно (равнище на предикатното смятане); молекулярно (равнище на съждителното смятане); клетъчно (равнище на задачите-компоненти). В процеса на решаване те заемат съществено място като обикновено и трите имат решаваща роля.

Според нас силата на това разглеждане се състои в това, че отделните действия при решаване на математически задачи се фиксират и структурират в похвати, така че отчитат спецификата на математическите знания и най-вече на логическата им основа. Съставът на дейността решаване на математически задачи както и структурата на решенията са подходящи за разделното им усвояване. Те са в голяма степен вербализуеми и усвояването им е важна предпоставка за пълноценно усвояване на логиката на езика и за развитие на теоретико-множественото мислене.

Най-ефективно средство за усвояване на математическата дейност от учениците е обучаването чрез задачи. То може да се разглежда в два аспекта - решаване на задачи и съставяне на задачи. Първият аспект е многостранно изследван, но въпреки това не е загубил актуалност. Публикациите в научната литература относно втория аспект са значително по-малко. Дейността съставяне на математически задачи е обект на системно изследване в разработките на Д. Милушева. В една от публикациите и срещаме следното определение: Дейността съставяне на математически задачи е дейност по усвояване на ситуации, съставяне на знакови модели на проблемни или задачни ситуации и тяхното преобразуване [4].

Когато съпоставяме дейността решаване на математически задачи (ДРМЗ) и дейността съставяне на математически задачи (ДСМЗ) в рамките на настоящия анализ се забелязва следното:

- в ориентировъчната част на ДСМЗ в по-голяма степен се обективизират евристични похвати;
- контролната част на ДСМЗ в по-голяма степен се слива с изпълнителската част;
- ДСМЗ включва в по-голяма степен опериране в явен вид с правдоподобни твърдения и правила за извод;

Съпоставянето на ДРМЗ и ДСМЗ ни дава основание да твърдим, че те взаимно се проникват и допълват. Съвместното им използване създава възможности за съчетаване на логически разнородни но психологически стиковани в някаква цялост части.

В заключение могат да се направят следните изводи.

Дейността решаване на математически задачи има съставки, които са с ясно изразен алгоритмичен тип, както и такива, които са с подчертан евристичен тип. Математическото доказателство е образец на дедуктивно умозаключение. В този

смисъл могат да се очакват съществени различия в етапите и механизмите на овладяване на: дейността решаване на задачи в цяло; съставките и от алгоритмичен тип; съставките и от еристичен тип; логическия и еквивалент.

Дидактическата значимост на взаимовръзката ДРМЗ и ДСМЗ се изразява в това, че съчетаното им използване създава условия за формиране на взаимосвързани познавателни умения и умения за пренос.

Едно естествено продължение на анализа в разработката е той да се осъществи от гледна точка на формирането на умения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Вестхаймер, М. Продуктивно мышление. Москва, "Прогрес", 1987.
2. Ганчев, И. Основни учебни дейности в урока по математика. София, ИФ"Модул-96", 1999.
3. Крупич, В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. Москва, "Прометей", 1995.
4. Милушева-Бойкина, Д. Анализ на дейността при съставяне на математически задачи. Сб. Научни трудове на ПУ "П. Хилендарски", том 36, кн. 2, 1999, с. 95-100.
5. Пойя, Д. Как да се решава задача. София, Н.П., 1972.
6. Пойя, Д. Математиката и правдоподобните разсъждения. Том първи, София, Н.П., 1970.
7. Фридман, Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. Москва, 1977.

гл. ас. д-р Петър Д. Петров, Тракийски университет - ИПКУ

## ANALYSIS OF THE ACTIVITY OF SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS

**Petar Petrov**

In the paper we analyze the activity of solving mathematical problems using models, described in the terms of different languages. There are differentiated psychologo-didactical and logically-mathematical accents of analysis.

Some characteristics of the process of solving mathematical problems are worked out which render: the realizing of tentative role and control; the algorithmic and heuristic components, the specific of mathematical knowledge and their logical background; the connection with the activity of creating mathematical problems.