

1 Числови редици

1) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 2}{n^2 + 1}$.

2) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n + 1}{10n^2 + 2}$.

3) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 8n}{n^4 + 2}$.

4) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2}$.

5) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

6) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 4^n}{4^{n+2} - 2^n}$.

7) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$.

8) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)$.

9) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$.

10) Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 3n + 2} \right)^n$.

11) Намерете границата $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n + 4}{2}$.

12) Намерете границата $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \frac{5a_n}{6} - \frac{a_{n-1}}{6}$.

13) Докажете, че редицата $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \frac{1}{2 + 2a_n^2} + 1$ е сходяща.

2 Функции.

- 1) Определете дефиниционната област на функцията $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$.
- 2) Определете дефиниционната област на функцията $f(x) = (x - 2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
- 3) Определете дефиниционната област на функцията $f(x) = \arcsin(1 - x) + \ln(\ln x)$.
- 4) Определете дефиниционната област и областта от стойности на функцията $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$.
- 5) Определете дефиниционната област и областта от стойности на функцията $f(x) = \ln(1 - 2 \cos x)$.
- 6) Намерете областта от стойности на функцията $f(x) = \cotg(x) : (0, 1] \rightarrow Y$.
- 7) Нека $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6$. Намерете $f(0), f(1), f(2), f(3)$.
- 8) Нека $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in (-\infty, 0] \\ 2^x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$. Намерете $f(-2), f(-11), f(0), f(1), f(2)$. Намерете $f(-x), f(1+x), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$.
- 9) Нека $f(x) = x - x^3$. Намерете множествата за които е изпълнено: $f(x) = 0, f(x) > 0, f(x) < 0$.
- 10) Намерете $f(g(x)), f(f(x)), g(g(x))$ и $g(f(x))$, ако $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2^x$.
- 11) Докажете, че функцията $f = x^2$ е монотонно растяща в интервала $[0, +\infty)$.
- 12) Докажете, че функцията $f = x^2$ е монотонно намаляваща в интервала $(-\infty, 0]$.
- 13) Намерете обратната функция на $f = \frac{1-x}{1+x}$.
- 14) Намерете обратната функция на $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2, & x \in [1, 4] \\ 2^x, & x \in (4, +\infty) \end{cases}$.
- 15) Коя от функциите е четна и коя нечетна: $f(x) = 3x - x^3, f(x) = 2^x + 2^{-x}$.
- 16) Намерете периода на функцията $f(x) = \sin(2x)$.
- 17) Намерете периода на функцията $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

3 Граница на функция

- 1) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$.
- 2) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$.
- 3) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.
- 4) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
- 5) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$.
- 6) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$.
- 7) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln^3 x}{x + 1}$.
- 8) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x} \cos x}$.
- 9) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$.
- 10) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$.
- 11) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.
- 12) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^5 x}{x^2}$.

4 Непрекъснати функции

- 1) За коя стойност на λ е непрекъснатата функцията $f(x) = \begin{cases} x \ln(1 + x^2), & x \neq 0 \\ \lambda, & x = 0. \end{cases}$
- 2) Нека $f(x) = x^2 + x$. Попълнете таблицата в точката $x_0 = 2$. Намерете $\delta > 0$, така че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, за $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.001$.
- 3) Има ли корен уравнението $\sin x - x + 1 = 0$ в интервала $(-\infty, +\infty)$.
- 4) Има ли корен уравнението $x^5 - 3x + 1 = 0$ в интервала $[-1, 2]$.
- 5) Има ли най-малка и най-голяма стойност функцията $x + \sqrt{x}$ в интервала $(0, 4]$ и на колко са равни.
- 6) Има ли най-малка и най-голяма стойност функцията $f(x) = (x - 1)^2$ в интервала $(0, 4]$ и на колко са равни.
- 7) Изследвайте за равномерна непрекъснатост функцията $x + \sqrt{x}$ в интервала $[0, +\infty)$.
- 8) Изследвайте за равномерна непрекъснатост функцията e^{-x^2} , в интервала $(-\infty, +\infty)$.
- 9) Намерете $\omega(\delta)$ за $\cos x$ в интервала $(-\infty, +\infty)$.
- 10) Намерете $\omega(\delta)$ за $\frac{1}{x^2}$ за $x \in (0, 1)$.

5 Производна на функция

- 1) Намерете производната на $f(x) = e^x \ln x$.
- 2) Намерете производната на $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.
- 3) Намерете производната на $f(x) = \operatorname{tg}(\sin(\cos x))$.
- 4) Намерете производната на $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{\ln x}$.
- 5) Намерете производната на $f(x) = x^{\sin x}$.
- 6) Намерете производната на $f(x) = (\operatorname{tg} x)^x$.
- 7) Намерете производната на $f(x) = |\sin^3 x|$.
- 8) Намерете производната на $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x^2), & x \geq 0 \\ x, & x < 0. \end{cases}$
- 9) Намерете за какви стойности на a функцията $f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ в точката $x = 0$ е непрекъсната, има производна, има непрекъсната производна.
- 10) Докажете неравенството $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$.
- 11) Докажете неравенството $\frac{x - y}{x} \leq \ln\left(\frac{x}{y}\right) \leq \frac{x - y}{y}$ за $0 < y < x$.
- 12) Намерете броя на реалните корени на уравнението $\ln x - ax$.

6 Приложение на диференцирането.

- 1) Докажете тъждеството $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4}$ за всяко $x > -1$.
- 2) Намерете интервалите на монотонност на функцията $f(x) = x^2 - \ln x$.
- 3) Докажете, за всяко $x \geq 0$ е изпълнено неравенството $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- 4) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$.
- 5) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg x}{e^{1/x^2}}$.
- 6) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - 1)e^{\operatorname{tg} x}$.
- 7) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$.
- 8) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin(2x)}$.
- 9) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x}$.
- 10) Намерете $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}$.
- 11) Намерете $(e^{e^x})^{(n)}$.
- 12) Напишете формулата на Тейлор за функцията $x^2 e^x$ в точката $x_0 = 0$.
- 13) Пресметнете с точност $\varepsilon < 0.001$ числото $\sqrt[3]{20}$.
- 14) Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \cotg x}{x \sin x}$.
- 15) Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = (x-4)^4(x+3)^3$.
- 17) Намерете $\max\{e^x(x^2 - x - 1) : x \in [-3, 0]\}$ и $\min\{e^x(x^2 - x - 1) : x \in [-3, 0]\}$.
- 16) Намерете интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функцията $f(x) = \ln(1+x^2)$.
- 17) Докажете, за всяко $p \geq 0$ и $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ е изпълнено неравенството $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^n x_k^p$.
- 18) Изследвайте и начертайте графикана на функцията $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.
- 19) Изследвайте и начертайте графикана на функцията $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1$.
- 20) Изследвайте и начертайте графикана на функцията $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.
- 21) Изследвайте и начертайте графикана на функцията $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.