

СЕМИНАР НА ФМИИТ

Хисар, 27-28 ноември 2013

Диференциална геометрия
на гладки многообразия
с тензорна структура
и индефинитни метрики

проф. д-р Манчо МАНЕВ

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Факултет по математика, информатика и ИТ
катедра „Алгебра и геометрия“

(публична академична лекция за професор)

Въведение

За участие в конкурса са избрани 32 научни труда, в това число 21 научни статии, 2 учебника и 9 учебни помагала, всички публикувани след конкурса за „доцент“ през март 2003 г.

От представените 21 научни статии: 16 статии са в 12 списания, 15 са публикувани в чужбина, 9 статии са в 6 списания с Thomson Reuters Impact Factor (IF), общ IF = 5,289, а 1 статия е в списание с AMS Mathematical Citation Quotient (MCQ), MCQ = 0,23.

Общият брой известни на автора цитирания (без самоцитиранията, включително и от съавторите) от общия списък на научните статии на кандидата е 68 в 35 публикации.

От тях 9 цитирания са в 8 списания с IF и 2 цитирания са в 1 списание с MSQ.

Общият импакт фактор на цитиранията е $IF = 6,032$ и $MSQ = 0,44$.

Общият импакт фактор на цитиранията на статиите за участие в конкурса е $IF = 5,230$.

Забелязани са още 7 цитирания на учебни материали на кандидата.

НАУЧНИ ПУБЛИКАЦИИ

Научните изследвания и резултатите са свързани с изучаването на диференциалната геометрия на гладки многообразия с допълнителни тензорни структури.

Получени са резултати за четири вида многообразия:

- ▶ почти контактните В-метрични многообразия,
- ▶ почти комплексните многообразия с норденова метрика,
- ▶ почти хиперкомплексните многообразия с ермитова и норденови метрики,
- ▶ римановите почти продуктни многообразия.

Поради това, тези научни публикации са разделени тематично в 4 групи.

1. Върху почти контактни В-метрични многообразия

*Диференциалната геометрия на тези многообразия с индефинитна метрика е тема на докторската дисертация на автора, изследванията в която са сред първите резултати върху разглежданите многообразия (не само в България) след началото на тяхното изучаване, поставено със статията на Г. Ганчев, В. Михова и К. Грибачев в *Mathematica Balkanica* през 1993 г.*

Това е паралелно направление в диференциалната геометрия на това на добре известните почти контактни метрични многообразия, за които рестрикцията на почти контактния ендоморфизъм върху контактното разпределение индуцира изометрия относно римановата метрика във всеки допирателен слой.

В нашия случай изучаваме почти контактни многообразия с B -метрика, при които споменатата рестрикция индуцира анти-изометрия относно псевдоримановата метрика.

Изучаването на тези многообразия продължава и до сега от редица автори у нас и в чужбина.

[16]^a G. NAKOVA, M. MANEV. *Curvature properties on some three-dimensional almost contact manifolds with B-metric, II*. Proc. 5th Int. Conf. Geometry, Integrability & Quantization V, Eds. I. M. Mladenov, A. C. Hirshfeld, SOFTEX, Sofia, 2004, 169–177.

В [16] са изучени свойствата на тензора на кривина върху 3-мерно почти контактно многообразие с B-метрика, принадлежащо на два от четирите главни класа \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_{11} .

Другите два главни класа са разгледани в първата част на тази работа.

Обърнато е внимание на размерност 3, която е най-ниската възможна размерност за почти контактните многообразия с B-метрика.

^aНомерът в скобите е от общия списък на научните и учебните публикации.

Намерени са явни изразявания на тензора на кривина, тензора на Ricci и скаларната кривина за съответните класове.

Дадени са геометрични характеристики на разглежданите многообразия, като са определени:

- класовете относно класификацията на тензорите на кривина,
- необходими и достатъчни условия за айнщайнов тип на многообразието и
- специалните секционни кривини за разглежданата структура.

[27] M. MANEV, M. TEOFILOVA. *On the curvature properties of real time-like hypersurfaces of a Kähler manifold with Norden metric*. In: Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, Eds. K. Sekigawa, V. Gerdjikov and S. Dimiev, World Sci. Publ., 2009, 174–184.

В [27] е разгледан един вид на почти контактни В-метрични хиперповърхнини на келеров тип многообразие с норденова метрика, а именно реална времеподобна хиперповърхнина.

В случая, когато обемащото многообразие има постоянни напълно реални секционни кривини, са намерени явно тензорът на кривина и секционните кривини на ξ -площадка и φ -холоморфна площадка, тензорът на кривина за каноничната свързаност върху хиперповърхнината.

Освен това, ако хиперповърхнината е нормално почти контактно многообразие, са намерени тензорът на кривина на свързаността на Levi-Civita и на каноничната свързаност и съответните скаларни и специални секционни кривини.

За тези кривинни величини е разгледан случая, когато каноничната свързаност е плоска.

[31] M. MANEV. *Natural connection with totally skew-symmetric torsion on almost contact manifolds with B-metric*. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., vol. 9, no. 5 (2012), 1250044 (20 pages); IF(2011):0.856, H-index=12, SJR(2011):0.039, EF(2010):0.003112, AI(2010):0.4531.

В [31] е конструирана една естествена свързаност с напълно кососиметрична торзия върху многообразия с почти контактна В-метрична структура (φ, ξ, η, g) .

Определен е класът на разглежданите многообразия, където тази т.нар. φ КТ-свързаност съществува.

Класът се характеризира чрез анулирането на присъединения симетричен тензор на тензора на Nijenhuis.

Получени са някои кривинни свойства за тази свързаност, когато съответният кривинен тензор има свойствата на тензора на кривина за свързаността на Levi-Civita ∇ и тензорът на торзията T за φ KT-свързаност D е паралелен, а именно T е затворена 3-форма и удовлетворява определено твърждение.

В този случай са намерени свойствата на тензора на кривина за ∇ относно почти контактната B-метрична структура, както и необходими и достатъчни условия за изотропност на ковариантната производна $\nabla\varphi$.

За илюстрация на горните свойства е конструиран и характеризирен пример на 5-мерна група на Lie със слаба неабелева (φ, ξ, η, g) -структура и D -паралелна торзия T .

Съответната алгебра на Lie зависи от 6 реални параметри.

[33] M. MANEV. *Curvature properties on some classes of almost contact manifolds with B-metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 65, no. 3 (2012), 283–290; IF(2011):0.210, H-index=5, SJR(2011):0.031, EF(2010):0.000743, AI(2010):0.0386.

В [33] са разгледани многообразия с почти контактна B-метрична структура (φ, ξ, η, g) , като от специален интерес са т.нар. вертикални класове, където ковариантната производна на φ относно свързаността на Levi-Civita ∇ се изразява чрез ковариантната производна на векторното поле на Reeb ξ и ендоморфизмът $\nabla_{\xi}\varphi$ е нулев.

Изучени са кривинните свойства на тези многообразия и по-специално доказани са твърдения за тензора на кривина за свързаността на Levi-Civita.

Конструиран и характеризиран е един пример на 5-мерни нормални почти контактни многообразия с нулеви асоциирани 1-форми на Lee върху свързана група на Lie.

Съответната алгебра на Lie зависи от 6 реални параметри.

За полученото многообразие са намерени условия за параметрите еквивалентни на следните свойства: $\nabla\varphi$ е инвариантен тензор; многообразието е почти айнщайново; многообразието е скаларно плоско.

[37] M. MANEV, M. IVANOVA. *A natural connection on some classes of almost contact manifolds with B-metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 65, no. 4 (2012), 429–436; IF(2011):0.210, H-index=5, SJR (2011):0.031, EF(2010):0.000743, AI(2010):0.0386.

В [37] са разгледани почти контактни многообразия с В-метрика и е въведена една естествена свързаност, т.е. специална линейна свързаност, която запазва почти контактната В-метрична структура върху тези многообразия.

Това е т.нар. φ В-свързаност, чиято рестрикция върху контактното разпределение $\text{Ker } \eta$ е известната В-свързаност върху почти комплексните многообразия с норденова метрика.

Въведената φ В-свързаност ∇' е изследвана върху някои класове на разглежданите многообразия, които са обект на изучаване в [33].

Върху тези многообразия φ B-свързаността съвпада с φ -каноничната свързаност.

Намерени са тъждества за тензора на торзия за ∇' , както и релация между тензорите на кривина за φ B-свързаността и свързаността на Levi-Civita ∇ .

Намерени са необходими и достатъчни условия тензорът на кривина за ∇' да бъде от келеров тип, т.е. да има свойствата на тензора на кривина за ∇ в класа на косимплектичните многообразия с норденова метрика.

[39] M. MANEV, M. IVANOVA. *Natural connections with torsion expressed by the metric tensors on almost contact manifolds with B-metric*. Plovdiv Univ. Sci. Works – Math., vol. 38, no. 3 (2011), 47–58.

В [39] са разгледани четирите главни класа на почти контактните B-метрични многообразия, т.е. многообразието, върху които ковариантната производна на φ се изразява явно чрез метричните тензори и основните 1-форми.

Описано е чрез 4 параметри семейството на линейните свързаности, запазващи структурите на многообразието, като са намерени явният вид на тензора на торзия за тези естествени свързаности и негови свойства.

В това семейство са определени φ -каноничната свързаност и свързаността, за която параметрите са нулеви.

[40] M. MANEV, M. IVANOVA. *Almost contact B-metric manifolds with curvature tensor of Kähler type*. Plovdiv Univ. Sci. Works – Math., vol. 39, no. 3 (2012).

В [40], върху произволно 5-мерно почти контактно B-метрично многообразие е определен видът на произволен φ -келеров тип тензор (т.е. тензор, удовлетворяващ свойствата на тензора на кривина на свързаността на Levi-Civita в специалния клас на паралелните структури върху многообразието).

В изразяването участват скаларните кривини на напълно реалните площадки, ортогонални на ξ , и двата взаимно асоциирани тензори от φ -келеров тип, конструирани само чрез метричните тензори на многообразието по аналогия с произведението на Kulkarni-Nomizu.

Доказано е за произволна размерност на многообразието, че двете негови асоциирани 1-форми на Lee θ и θ^* се пораждат чрез нехомоморфна двойка от скаларните кривини относно φ -келеровия тип тензор на кривина за φ -каноничната свързаност върху многообразието от главните класове със затворени 1-форми θ и θ^* .

Резултатите са илюстрирани чрез известен пример на изотропна хиперповърхнина относно асоциираната норденова метрика в \mathbb{R}^{2n+2} .

2. Върху почти комплексни многообразия с норденова метрика

Диференциалната геометрия на почти комплексните многообразия с ермитова метрика е добре изучена. Паралелното направление на изследвания върху почти комплексните многообразия, когато метриката е норденова (някои я наричат антиермитова) има начало през 1985 г., когато К. Грибачев, Д. Мекеров и Г. Джелепов публикуват четири статии върху т. нар. от тях „обобщени В-многообразия“ в Доклади на БАН. След това към изучаването се присъединяват редица наши и чуждестранни учени.

Авторът участва в изучаването на квазикелеровите многообразия с норденова метрика, т.е. на многообразието от класа \mathcal{W}_3 в класификацията на Г. Ганчев и А. Борисов от 1986 г., излязла в Доклади на БАН. Това е единственият основен клас с неинтегруема почти комплексна структура.

[20] D. MEKEROV, M. MANEV. *On the geometry of quasi-Kähler manifolds with Norden metric*. Nihonkai Math. J., vol. 16, no. 2 (2005), 89–93.

В [20] е разгледан основния клас на неинтегруемите почти комплексни многообразия с норденова метрика – класът \mathcal{W}_3 на квазикелеровите многообразия с норденова метрика.

Доказани са твърдения за ковариантните производни на основния тензор от тип $(0,3)$ върху произволно почти комплексно многообразие с норденова метрика (M, J, g) и върху многообразие от класа \mathcal{W}_3 .

Изучени са негови кривинни свойства: за тензора на Ріссі, скаларната кривина и техните присъединени величини.

Въведен е изотропно-келеров тип на изследваните многообразия, т.е. почти комплексни многообразия с нулева квадратична норма на ∇J относно норденовата метрика и нейната свързаност на Levi-Civita ∇ .

Намерени са еквивалентни условия за изотропно-келеров тип квазикелерови многообразия с норденова метрика.

Тези условия са:

- притежаване на келеров тип свойство на тензора на кривина R за ∇ ;
- силна изотропност на холоморфните площадки;
- нулева бисекционна кривина на двойките холоморфни площадки.

[21] K. GRIBACHEV, M. MANEV, D. MEKEROV. *A Lie group as a 4-dimensional quasi-Kähler manifold with Norden metric*. JP J. Geom. Topol., vol. 6, no. 1 (2006), 55–68.

В [21] е установено, че всяко квазикелерово многообразие с норденова метрика, нулев тензор на Weyl и постоянни скаларни кривини е локално симетрично, т.е. $\nabla R = 0$.

Върху свързана група на Lie е конструиран пример на 4-мерно квазикелерово многообразие с инвариантна (килингова) норденова метрика.

Съответната алгебра на Lie зависи от 4 реални параметри.

Това многообразие се характеризира геометрично.

Намерени са условия за параметрите, които са еквивалентни на условията: многообразието е изотропно-келерово; тензорът на Nijenhuis е изотропен; скаларните кривини са нулеви.

[22] D. MEKEROV, M. MANEV, K. GRIBACHEV. *Quasi-Kähler manifolds with a pair of Norden metrics*. Results Math., vol. 49, no. 1-2 (2006), 161–170; IF(2009):0.513, MCQ(2008):0.28, H-index=7.

В [22] е разгледан основният клас \mathcal{W}_3 на неинтегруемите почти комплексни многообразия с норденова метрика, където ∇ и $\tilde{\nabla}$ са съответните свързаности на Levi-Civita за двойката норденови метрики g и \tilde{g} .

Дадени са взаимовръзките при трансформацията от ∇ в $\tilde{\nabla}$ между съответните тензори върху M : ковариантните производни на почти комплексната структура J , тензорите на кривина.

Относно $\tilde{\nabla}$ е характеризирани примера за (G, J, g) , даден в [21].

Получено е необходимо и достатъчно условие за параметрите асоциираното многообразие (G, J, \tilde{g}) да бъде изотропно-келерово, или тензорът на Weyl за $\tilde{\nabla}$ да бъде нулев, или скаларната кривина за $\tilde{\nabla}$ да е нулева.

[23] M. MANEV, K. GRIBACHEV, D. MEKEROV. *On three-parametric Lie groups as quasi-Kähler manifolds with Killing Norden metric*. In: Topics in Contemp. Diff. Geom., Compl. Anal. & Math. Phys., Eds. S. Dimiev & K. Sekigawa, World Sci. Publ., NJ, 2007, 205–214.

В [23] е разгледана $2n$ -мерна свързана група на Lie с почти комплексна структура и килингова норденова метрика.

Доказано е, че тя е локално симетрично квазикелерово многообразие с норденова метрика.

За 6-мерния случай е конструиран пример на такова многообразие, чиято алгебра на Lie зависи от 3 реални параметри.

Това многообразие е характеризирано геометрично.

Установено е, че всяко такова 6-мерно многообразие е изотропно-келерово, скаларно плоско и има нулеви холоморфни секционни кривини.

[25] M. MANEV, D. MEKEROV. *On Lie groups as quasi-Kähler manifolds with Killing Norden metric*. Adv. Geom., vol. 8 (2008), 343–352; IF(2008):0.324, SJR(2008):0.033, H-index=11, EF(2008)=0.001991, AI(2008):0.4778.

В [25] върху група на Lie е конструиран пример на 6-мерно квазикелерово многообразие с килингова норденова метрика, чиято алгебра на Lie зависи от 6 реални параметри.

Това многообразие е характеризирано геометрично.

Установено е, че всяко такова многообразие е изотропно-келерово, скаларно плоско и локално симетрично, и освен това има изотропен тензор на Nijenhuis и нулеви холоморфни секционни кривини.

[26] D. MEKEROV, M. MANEV. *On $4n$ -dimensional Lie groups as quasi-Kähler manifolds with Killing Norden metric.* Novi Sad J. Math., 2008, vol. 38, no. 2 (2008), 105–113.

В [26] е конструирано $4n$ -мерно квазикелерово многообразие с килингова норденова метрика върху група на Lie, чиято алгебра на Lie зависи от $4n$ реални параметри.

Реализирана е идеята за обобщение по размерността на многообразието от [21].

Това многообразие е характеризирано геометрично.

Установено е, че всяко такова многообразие е локално симетрично и конформно плоско.

Намерено е необходимо и достатъчно условие за параметрите конструираното многообразие да бъде изотропно-келерово, или скаларно плоско, или тензорът на Nijenhuis да е изотропен.

Освен това е намерено еквивалентно условие за параметрите, многообразието да бъде с постоянни холоморфни секционни кривини.

3. Върху почти хиперкомплексни многообразия с ермитова и норденови метрики

В тази група статии са продължени изследванията с участието на автора върху $4n$ -мерно многообразие M с почти хиперкомплексна структура $H = (J_1, J_2, J_3)$.

Това почти хиперкомплексно многообразие (M, H) снабдяваме с метрична структура G , породена от псевдориманова метрика g с неутрална сигнатура.

*Тези многообразия са въведени от К. Грибачев, автора и С. Димиев в публикация от сборника статии *Trends of Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics* на World Scientific Publishing през 2003 г.*

Известно е, че ако g е ермитова метрика върху (M, H) , получената метрична структура G е известната хиперермитова структура.

Тя се състои от дадената ермитова метрика g , относно трите почти комплексни структури на H и трите келерови форми, асоциирани с g чрез H .

Разглежданата от нас метрична структура G има различен тип съгласуваност с H .

Структурата G се поражда от неутрална метрика g , такава че J_1 (съответно J_2, J_3) от H да действа като изометрия (съответно действат като антиизометрии) относно g във всеки допирателен слой.

Ако почти комплексните структури на H действат като изометрии или антиизометрии относно метриката, тогава съществуването на една антиизометрия поражда съществуването точно на още една антиизометрия и една изометрия.

По този начин G съдържа метриката g и три $(0,2)$ -тензори асоциирани с H – една келерова форма и две метрики от същия тип.

Съществуването на такива билинейни форми върху почти хипер-комплексно многообразие е доказано в [24].

Неутралната метрика g е ермитова относно първата почти комплексна структура J_1 на H , а g е антиермитова (т.е. норденова) метрика относно другите две почти комплексни структури J_2 и J_3 на H .

По тази причина наричаме породеното многообразие (M, H, G) почти хиперкомплексно многообразие с ермитова и норденови метрики или накратко почти (H, G) -многообразие.

В последните години многообразия с неутрални метрики и различни тензорни структури са обект на интерес в теоретичната и математическата физика.

[24] K. GRIBACHEV, M. MANEV. *Almost hypercomplex pseudo-Hermitian manifolds and a 4-dimensional Lie group with such structure.* J. Geom., vol. 88, no. 1-2, 2008, 41–52; MCQ(2008):0.23, SJR(2008):0.030, H-index=10.

В [24], върху всяко $4n$ -мерно векторно пространство с хиперкомплексна структура е доказано съществуването на ермитова и три вида псевдоермитови билинейни форми (такава форма е ермитова относно едната комплексна структура и антиермитова относно другите две комплексни структури).

Така се въвежда почти (H, G) -структура върху всяко $4n$ -мерно многообразие.

Определена е структурната група на тези многообразия.

Установено е, че ако две от почти комплексните структури са паралелни относно свързаността на Levi-Civita за g , то паралелна е и третата почти комплексна структура, т.е. получава се т.нар. псевдохипекелерови многообразия.

Върху 4-мерна група на Lie с квазикелерова структура и норденова метрика, известна от [21], е въведена почти (H, G) -структура.

Това многообразие е характеризирано геометрично.

Намерени са необходими и достатъчни условия многообразието да бъде изотропно хиперкелерово, както и скаларно плоско.

[28] M. MANEV. *A connection with parallel torsion on almost hypercomplex manifolds with Hermitian and anti-Hermitian metrics.* J. Geom. Phys., vol. 61, no. 1 (2011), 248–259; IF(2011):0.818, SJR(2011):0.039, H-index=30, EF(2011):0.005889, AI(2011):0.4872.

В [28] обект на специален интерес е класът \mathcal{W} на локално конформно еквивалентните многообразия на псевдохиперкелеровите многообразия.

Ковариантните производни на елементите на $H = (J_1, J_2, J_3)$ са изразени явно чрез структурните тензори на H и G върху многообразието на \mathcal{W} .

В тази работа конструираме и характеризираме (H, G) -свързаност (т.е. свързаност, относно която (H, G) -структурата е паралелна) върху \mathcal{W} -многообразието.

Показваме, че тъй като псевдохиперкелеровите многообразия имат нулев тензор на кривина за свързаността на Levi-Civita ∇ , то тензорите със същите свойства са нулеви върху всяко почти (H, G) -многообразие.

Въвеждаме линейна свързаност D , относно която структурните тензори на почти (H, G) -многообразието са паралелни.

Тогава характеризираме тензора на торзия и тензора на кривина за D .

Разглеждаме специалния случай, за който торзията на D е D -паралелна.

За него характеризираме геометрично многообразието.

Конструираме клас на 4-мерни групи на Lie като \mathcal{W} -многообразия, където торзията на D не е D -паралелна.

Основният проблем в тази статия е съществуването и геометричните характеристики на разглежданите многообразия с D -паралелна торзия на естествената свързаност D .

Главният резултат тук е, че всяко локално конформно псевдохиперкелерово многообразие с D -паралелна торзия на D е D -плоско и има структура на група на Lie.

[32] M. MANEV, K. GRIBACHEV. *A connection with parallel totally skew-symmetric torsion on a class of almost hypercomplex manifolds with Hermitian and anti-Hermitian metrics*. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., vol. 8, no. 1 (2011), 115–131; IF(2011):0.856, SJR(2011):0.039, H-index=12, EF(2011):0.003136, AI(2011):0.4572.

В [32] конструираме естествена свързаност D с напълно кососиметричен тензор на торзията върху почти (H, G) -многообразия.

Наличието на почти комплексни структури с ермитова и норденови метрики ни дава основание да съсредоточим изследванията си върху тези класове, където съответните естествени свързаности с напълно кососиметрична торзия съществуват.

Именно това са класът \mathcal{G}_1 на почти ермитовите многообразия и класът \mathcal{W}_3 на квазикелеровите многообразия с норденова метрика.

Основно място в изследванията ни заема подкласът \mathcal{W}_1 в \mathcal{G}_1 на приблизително келеровите многообразия — важна част в теорията на геометричните структури от неинтегруем тип.

Изучаването на тези многообразия е започнато от А. Gray през 70-те години на XX век като концепция за слабата холономия и след това са били изследвани от много автори.

В тази статия характеризираме специализиран подклас (означен чрез \mathcal{W}_{133}) на $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{G}_1$ относно J_1 и \mathcal{W}_3 относно J_2 и J_3 .

Въвеждаме понятието псевдо-НКТ-свързаност (накратко, рНКТ-свързаност) върху почти (H, G) -многообразие и определяме класа на разглежданите многообразия, където такава свързаност съществува.

Това е класът $\mathcal{G}_1(J_1) \cap \mathcal{W}_3(J_2) \cap \mathcal{W}_3(J_3)$. След това конструираме рНКТ-свързаността D в специалния случай когато почти (H, G) -многообразието принадлежи на \mathcal{W}_{133} .

Доказваме, че тази свързаност има D -паралелна торзия и че всяко не- D -плоско (M, H, G) е слабо рНКТ-многообразие.

Изучени са някои кривинни свойства на тези многообразия.

Основната тема на изследване в тази статия е съществуването и геометричните характеристики на разглежданите многообразия с напълно кососиметрична торзия.

Главният резултат е, че известната КТ-свързаност върху приблизително келеровите многообразия играе ролята на рНКТ-свързаност върху съответното почти (H, G) -многообразие.

[18] M. MANEV, K. SEKIGAWA. *Some four-dimensional almost hypercomplex pseudo-Hermitian manifolds*. In: *Contemp. Aspects of Compl. Anal., Diff. Geom. & Math. Phys.*, Eds. S. Dimiev & K. Sekigawa, World Sci. Publ., NJ, 2005, 174–186.

В [18] по различни експлицитни методи са конструирани 10 нови примера на 4-мерни многообразия с почти (H, G) -структура.

Първо са получени многообразия на Engel по два начина с двойка изотропни хиперкелерови структури, които са неинтегруеми и формите на Lee са ненулеви, като в единия случай многообразието е симплектично, а в другия – не.

Другият вид примери са реални векторни пространства с почти (H, G) -структура:

- реално полупространство с интегрируема (H, G) -структура от главния клас \mathcal{W} на конформно еквивалентните на псевдохиперкелеровите многообразия, но не е изотропно-келерово относно никоя J_α ($\alpha = 1, 2, 3$);
- реално четвърт-пространство с неинтегруема (H, G) -структура, но изотропно-хиперкелерова и келерова относно J_1 .

Третият вид пример е реален псевдохиперцилиндър в \mathbb{R}_2^5 с неинтегруема почти (H, G) -структура и ненулеви форми на Lee.

Следващите три примера на почти (H, G) -структури са върху 2-мерни комплексни повърхнини в 3-мерно комплексно евклидово пространство, а именно:

- комплексен цилиндър като плоско псевдохиперкелерово многообразие;
- комплексен конус като плоско хиперкомплексно многообразие, което е келерово относно J_1 и конформно еквивалентно на келерово с норденова метрика относно J_2 и J_3 ;
- комплексна сфера като келерово норденово многообразие относно J_2 , но неинтегруемо с ненулеви форми на Lee относно J_1 и J_3 .

Следващите два примера са конструирани чрез групи на Lie:

- едното е комплексно норденово, но не е хиперкомплексно многообразие,
- а другото е плоско келерово относно J_1 , но не е комплексно норденово многообразие относно J_2 и J_3 .

Получените 4-мерни многообразия се характеризират чрез техните тензори на кривина, тензори на Ricci и линейни инварианти.

[19] M. MANEV. *Tangent bundles with Sasaki metric and almost hypercomplex pseudo-Hermitian structure*. In: Topics in Almost Herm. Geom. & Relat. Fields, Eds. Y. Matsushita, E. García-Río, H. Hashimoto, T. Koda, T. Oguro, 2005, 170–185.

В [19] допирателното разслоение TM като едно $4n$ -мерно многообразие е снабдено с почти (H, G) -структура, като базовото многообразие M е почти комплексно с норденова метрика.

Намерени са необходими и достатъчни условия за интегрируемост на J_α ($\alpha = 1, 2, 3$) в зависимост от свойствата на базовата почти комплексна структура J .

Въведена е метрика на Sasaki (т.е. диагонален лифт на базовата метрика) върху TM .

Намерени са зависимостите между съответните тензори на кривина за свързаностите на Levi-Civita върху TM и M .

Разгледани са случаите на плоски и локално симетрични многообразия.

Намерени са основните структурни тензори за J_α и съответните 1-форми на Lee.

Доказани са редица необходими и достатъчни условия за принадлежност на TM и M към основните класове на съответните многообразия.

По този начин са получени и са характеризирани дванадесет 8-мерни примери на разглеждания тип многообразия от известни (от други две статии с участието на автора) 4-мерни експлицитни примери използвани като базово многообразие.